J. Wengenroth
D. Sieg

SS 2009
29.04.2009

Grundlagen der Funktionentheorie
Übungsblatt 1
Abgabe und Besprechung am 6. Mai um 18 Uhr s.t.

Ü 1
Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-1/x^2)$ unendlich oft differenzierbar ist und dass es Polynome p_n gibt mit $f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp(-1/x^2)$.

Ü 2
Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ und $f : A \to \mathbb{C}$, so dass $\tilde{f}(x, y) = f(x+iy)$ zweimal partiell differenzier bar ist. Zeigen Sie $\Delta\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$ für jeden inneren Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ in dem f differenzierbar ist (dabei ist $\Delta = D_1^2 + D_2^2$ der Laplace-Operator).

Ü 3
Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ um einen gegebenen Punkt $z_0 \neq 0$ in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Ü 4
Seien $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ injektiv und $z_0 \in A$, so dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \to A$ stetig in $f(z_0)$ ist. Zeigen Sie, dass f^{-1} in $f(z_0)$ differenzierbar ist, falls f in z_0 differenzierbar ist und $f'(z_0) \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie $(f^{-1})'(f(z_0))$.

Ü 5
Seien $R > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar mit $f(x, y) = 0$ für alle $x^2 + y^2 \geq R^2$. Zeigen Sie für $\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(D_1 f - \frac{1}{i} D_2 f)$, dass

$$f(0) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\overline{\partial} f(x, y)}{x + iy} d(x, y).$$

Benutzen Sie dazu die Substitutionsregel für Polarkoordination

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} g(x, y) d(x, y) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} g(r\,\cos(\alpha), r \sin(\alpha)) r \, d\,\alpha \, dr$$

und berechnen Sie mit der Kettenregel die partiellen Ableitungen von $(r, \alpha) \mapsto f(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$.