Elemente der Analysis II
Übungsblatt 7Ü 31

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(r, \alpha) = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \sin(\alpha) \end{bmatrix}$. Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix in jedem Punkt $\begin{bmatrix} r \\ \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $r \neq 0$ invertierbar ist.

Ü 32

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ überall differenzierbar und $x, y \in A$. Zeigen Sie (mit Hilfe der Kettenregel und der Funktion $\varphi(t) = x + t(y - x)$), dass es $\xi \in A$ gibt mit $f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y - x)$.

Ü 33

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ gilt $f(tx) = t^\alpha f(x)$.

- (1) Zeigen Sie, dass eine homogene Funktion durch $f|_S$ mit $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_n = 1\}$ eindeutig festgelegt ist.
- (2) Ist f überall total differenzierbar und homogen vom Grad α , so gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x).$$

Differenzieren Sie dazu die Funktion $\varphi(t) = f(tx)$ im Punkt $t = 1$.

Ü 34

Zeigen Sie, dass eine „symmetrische“ Matrix $H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ genau dann streng positiv definit ist, wenn $a > 0$ und $ac > b^2$ gilt. (Minimieren Sie dazu $x \mapsto [x, y] \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ bei festem $y \in \mathbb{R}$).

Ü 35

Berechnen Sie $D_1 D_1 f(x, y) + D_2 D_2 f(x, y)$ für die durch $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.