J. Wengenroth SS 2009

19.06.2009

Elemente der Analysis II
Übungsblatt 6

Ü 26

Zeigen Sie, dass jede in einem Punkt $x \in A$ total differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ in diesem Punkt auch stetig ist.

Ü 27

Bestimmen Sie alle Richtungsableitungen im Punkt $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 1 & , \text{ falls } y = x^2 \text{ und } x > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$. Ist f in $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ total differenzierbar?

Ü 28

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto [x, y] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie $Df(x, y)$ für alle $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Ü 29

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und in $x \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar, so dass die Umkehrabbildung f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ ebenfalls total differenzierbar ist.
Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix von f^{-1} in y gleich der Inversen der Jacobi-Matrix von f in x ist.

Ü 30

Wir betrachten den Graphen $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ einer überall total differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $z = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Ist $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, so dass der Abstand zwischen $\begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ minimal unter allen Abständen zwischen Elementen des Graphen und z ist, so ist $\begin{bmatrix} a - x \\ b - y \end{bmatrix}$ ein Vielfaches des Gradienten $\nabla f(x, y)$.