Elemente der Analysis II
Übungsblatt 5

Ü 21

In den drei Ländern A , B und C gebe es die Flughäfen a_1, a_2, a_3 beziehungsweise b_1, b_2 sowie c_1, c_2, c_3, c_4 . Es gibt keine Direktflüge von A nach C . Die Anzahl der täglichen Verbindungen von A nach B beziehungsweise B nach C sind in folgenden Tabellen wiedergegeben:

	b_1	b_2		c_1	c_2	c_3	c_4	
a_1	2	1	und	b_1	1	0	2	1
a_2	0	3		b_2	1	2	3	1
a_3	1	2						

Wieviele Verbindungen (mit Zwischenstopp in B) von jedem der Flughäfen a_1, a_2, a_3 in A nach c_1, c_2, c_3 bzw. c_4 gibt es täglich? Was hat das mit der Vorlesung zu tun?

Ü 22

- (a) Zeigen Sie für zwei offene Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, dass $A \cap B$ wieder offen ist.
- (b) Gilt die Aussage in (a) auch für Durchschnitte $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A_k \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}\}$ für eine Folge offener Mengen $A_1, A_2, A_3, \dots$?

Ü 23

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen $\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{es gilt } \varepsilon > 0 \text{ mit } K(x, \varepsilon) \subseteq A\}$ Inneres von A , $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$ Abschluss von A und $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ Rand von A .

- (a) Fassen Sie $\mathbb{R}^2$ als Weltkarte auf, und betrachten Sie $A = \text{Deutschland}$. Skizzieren Sie $\overset{\circ}{A}$ und ∂A . Spielt es dabei eine Rolle, ob die Grenzen mit den Nachbarländern als deutsch gewertet werden?
- (b) Nach der Vereinigung zweier Länder gibt es weniger Grenzen als vorher. Zeigen Sie dazu $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.

Ü 24

Zeigen Sie, dass folgende Bedingung an die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ äquivalent zur Stetigkeit im Punkt x ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (\|x - y\|_n \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_m \leq \varepsilon)$$

(Beachten Sie, dass in der Definition statt $\leq$ die Relation $<$ steht.)

Ü 25

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $f(x, y) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m c_{j,k} x^j y^k$ mit Zahlen $c_{j,k}$ heißt ein Polynom in zwei Variablen. Bestimmen Sie alle Richtungsableitungen $D_v f(0, 0)$.