

Elemente der Analysis II
Übungsblatt 4Ü 16

Seien $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ paarweise orthogonale Vektoren der Länge 1. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = [u_1, \dots, u_n]$ mit den Spalten $u_1, \dots, u_n$ invertierbar ist.

Ü 17

Prüfen Sie die beiden folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit, und bestimmen Sie gegebenenfalls die inversen Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ü 18

Bestimmen Sie alle Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} x_1 + x_2, & \text{falls } x_2 > 0 \\ x_1 - x_2, & \text{falls } x_2 \leq 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Ü 19

Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige (Produktions-)Funktion und $A \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge (gewünschter Outputs). Dann ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in A\}$ derjenigen Inputs, die zu einem Output in A führen, wiederum offen.

Ü 20

Zwei Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ heißen homöomorph, falls es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt, so dass sowohl f also auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$ stetig sind.

- (a) Zeigen Sie, dass je zwei offene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ homöomorph sind.
- (b) Das Intervall $[0, 1]$ ist nicht homöomorph zu $[0, 1] \cup [2, 3]$.
- (c) $[0, 1]$ ist nicht homöomorph zur Kreislinie $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.