J. Wengenroth

SS 2009
06.05.2009

**Elemente der Analysis II**
**Übungsblatt 2**

Ü 7
Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ paarweise orthogonal mit $\|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$. Zeigen Sie für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Implikation

$$au + bv + cw = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0.$$

Ü 8
Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren, die nicht auf einer Ursprungsgeraden liegen. Dann heißt

$$E(u, v) = \{au + bv : a, b \in \mathbb{R}\} \text{ die von } u \text{ und } v$$

aufgespannte Ebene.

(1) Zeigen Sie: $x, y \in E(u, v), s, t \in \mathbb{R} \Longrightarrow sx + ty \in E(u, v)$.

(2) Finden Sie eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit Bild $T(\mathbb{R}^2) = E(u, v)$.

(3) Skizzieren Sie $E(u, v)$ für $u = [1, 0, 0]$ und $v = [1, 1, 1]$.

Ü 9
Seien in der Situation von Ü 8 $z \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor außerhalb von $E(u, v)$ und $y \in E(u, v)$ ein Punkt der Ebene, der den Abstand zu $z$ minimiert, das heißt

$$\|z - y\| = \min\{\|z - x\| : x \in E(u, v)\}.$$

(1) Fügen Sie $z = [-1, 0, 1]$ und das zugehörige $y$ der Skizze in Ü 7(3) hinzu.

(2) Zeigen Sie $z - y \perp x$ für jedes $x \in E(u, v)$, indem Sie die Funktion $f(t) = \|z - y + tx\|^2$ minimieren. Beachten Sie dabei Ü 8 (1).

Ü 10
Zeigen Sie für die euklidische Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ des $\mathbb{R}^n$ die Ungleichungen

$$\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}^n$ gilt jeweils Gleichheit?