

Elemente der Analysis II
Übungsblatt 1Ü 1

Zeigen Sie für drei Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle x, y \rangle + 2\langle x, z \rangle + 2\langle y, z \rangle.$$

Ü 2

Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Versuchen Sie, diese Bezeichnung zu erklären.

Ü 3

Ein Handwerker will die Rechtwinkligkeit einer Ecke überprüfen und benutzt dazu einen Zollstock und $3^2 + 4^2 = 5^2$. Wie?

Ü 4

Eine Ursprungsgerade im \mathbb{R}^n ist eine Menge der Form

$$G = \{ap : a \in \mathbb{R}\} \text{ mit einem } p \in \mathbb{R}^n, p \neq [0, \dots, 0].$$

Zeigen Sie im Fall $n = 2$, dass jede Ursprungsgerade von der Form $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, y \rangle = 0\}$ ist mit einem geeigneten $y \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie eine geometrische Interpretation.

Ü 5

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen $E(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ Erwartungswert, $V(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - E(x))^2$ Varianz

und $K(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - E(x))(y_k - E(y))$ Kovarianz.

Zeigen Sie $K(x, y) = E(x \cdot y) - E(x)E(y)$, wobei $x \cdot y = [x_1 y_1, \dots, x_n y_n]$. Zeigen Sie außerdem, dass $a = K(x, y)/V(x)$ die Steigerung der Ausgleichsgeraden zu den Daten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ist.

Ü 6

Zeigen Sie, dass $u = [1, 1, 1], v = [1, 2, 2], w = [1, 2, 3]$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.