J. Wengenroth SS 2009

24.06.2009

Elemente der Analysis II
Tutorium Blatt 8

T 37

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{bmatrix} xy \\ x^2+y^2 \end{bmatrix}$ beziehungsweise $g(x,y) = \exp(2x+y)$. Berechnen Sie $\nabla(g \circ f)(x,y)$ einerseits mit der Kettenregel und andererseits, indem Sie $g(f(x,y))$ explizit ausrechnen und partiell differenzieren.

T 38

Bestimmen Sie den minimalen Funktionswert von $f : P \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2x + 3y$ mit $P = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y > 0 \right\}$.

T 39

Zeigen Sie folgende Aussage: Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend, so ist $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex.
Stimmt dies auch ohne die Monotonie von g? Untersuchen Sie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto \exp(x^2+y^2)$ auf Konvexität.

T 40

Welche der folgenden Funktionen sind homogen im Sinn von Ü 33? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto x^2 + 2xy + y^2$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto x + y^2$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto \max\{x^3, y^2\}$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto \begin{cases} x/y & , \text{ falls } y \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } y = 0 \end{cases}$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto x^p y^q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$.

T 41

Berechnen Sie $D_1 f(x,y)$, $D_2 f(x,y)$, $D_1(D_2 f)(x,y)$ sowie $D_2(D_1 f(x,y))$ für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto \frac{e^{x(1+y^2)}}{1+y^2}.$$