

Elemente der Analysis II
Tutorium Blatt 6T 27

Sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem Quadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ stetige Funktion. Zeigen Sie, dass jede Zahl z zwischen zwei Werten $f(x)$ und $f(y)$ ebenfalls ein Wert $f(\xi)$ ist. (Verwenden Sie dazu den Zwischenwertsatz für $f \circ \varphi$ mit $\varphi : [0, 1] \rightarrow Q$, $t \mapsto x + t(y - x)$).

T 28

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei wie in Ü 23 das Innere von A durch $\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{es gilt } \varepsilon > 0 \text{ mit } K(x, \varepsilon) \subseteq A\}$ definiert. Zeigen Sie für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, dass das Innere von $A \cap B$ gleich $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ ist. Stimmt die entsprechende Aussage auch für die Vereinigung?

T 29

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ y, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

in $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ stetig ist. (Tipp: Überlegen Sie sich, dass $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & \text{falls } t \neq 0 \\ 1, & \text{falls } t = 0 \end{cases}$ stetig ist und schreiben Sie $f(x, y) = yg(xy)$).

T 30

Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \exp(-x^2 - y)$ alle Richtungsableitungen $D_v f(0, 0)$.

T 31

Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Zeigen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jede Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, dass $D_v T(x) = T(v)$ gilt.