

**Elemente der Analysis II**  
**Tutorium Blatt 5**

T 23

Prüfen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die inversen Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

T 24

Zeigen Sie, dass die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2))$  auf  $\mathbb{R}^2$  stetig ist. Skizzieren Sie den Graphen von  $\varphi$ .

Bemerkung.  $\varphi$  ist die sogenannte zweidimensionale Gauß- oder Normalverteilungsdichte.

T 25

Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zwei reellwertige Funktionen und

$$\max\{f, g\} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass  $\max\{f, g\}$  in jedem Punkt stetig ist, in dem  $f$  und  $g$  beide stetig sind.

T 26

Für  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  und  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  schreiben wir  $x \prec y$ , falls  $x_1 < y_1$  und  $x_2 < y_2$ . In diesem Fall sagen wir, dass  $y$  den Vektor  $x$  *dominiert*. Übersetzen Sie folgende Aussagen in deutsche Sprache und entscheiden Sie, welche davon wahr sind:

- (a)  $\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^2 \quad (x \prec y \text{ oder } y \prec x)$
- (b)  $\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \exists y \in \mathbb{R}^2 \quad (x \prec y)$
- (c)  $\exists y \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (x \prec y)$
- (d)  $\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^2 \quad \exists z \in \mathbb{R}^2 \quad (x \prec z \text{ und } y \prec z).$

Für  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt  $x \in A$  *Pareto-optima für A*, falls es kein  $y \in A$  gibt mit  $x \prec y$ . Bestimmen Sie für  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq 1\}$  alle Pareto-optimalen Punkte.

T 27

Formulieren Sie die Aussage, dass jeder Mensch zwei Eltern hat, unter Benutzung der Quantoren  $\exists$  und  $\forall$ , der Menge  $M$  aller Menschen sowie der Bezeichnung  $x \rightsquigarrow y$  für die Tatsache, dass  $y$  ein Kind von  $x$  ist. Formulieren Sie außerdem die Negation der Aussage sowohl in deutscher Sprache, als auch mit Hilfe der Quantoren.