J. Wengenroth SS 2009
06.05.2009

Elemente der Analysis II
Tutorium Blatt 2

T 7

Wir stellen uns einen Wagen im $\mathbb{R}^2$ vor, der sich nur parallel zu den beiden Koordinatenachsen bewegen kann. Überlegen Sie sich anhand einer Skizze, dass der Wagen mindestens die Entfernung $E(x) = |x_1| + |x_2|$ zurücklegen muss, um vom Ursprung $[0, 0]$ nach $x = [x_1, x_2]$ zu fahren. Zeigen Sie, dass diese Abbildung $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften hat:

(1) $E(ax) = |a|E(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{R}$,

(2) $E(x + y) \leq E(x) + E(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$,

(3) $\|x\| \leq E(x) \leq \sqrt{2}\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

T 8

Skizzieren Sie folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2|\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} : \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie außerdem die Durchschnitte $A \cap B$, $A \cap C$ und $B \cap C$.

T 9

Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $u = [1, 2, 3]$, $v = [0, 4, 5]$ und $w = [0, 0, 6]$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

T 10

Sei $E(u, v)$ wie in Ü 7 die von $u, v \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Ebene. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $\tilde{v} \in \mathbb{R}^3$ gibt mit $u \perp \tilde{v}$ und $E(u, v) = E(u, \tilde{v})$. Versuchen Sie $\tilde{v} = v + \lambda u$ mit einer geeignet zu bestimmenden Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

T 11

Bestimmen Sie die Niveaumengen $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$ folgender Funktion

(1) $f(x, y) = x + y$,

(2) $f(x, y) = x^2 + 9y^2$,

(3) $f(x, y) = xy$,

(4) $f(x, y) = \sin(x + y) - 3$.