2.8 Satz (Liften von Kurven und Homotopien)
Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung von X.

(a) Für jede Kurve $f : I \to X$ und jedes $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = f(0)$ gibt es genau eine Kurve $\tilde{f} : I \to Y$ mit $\tilde{f}(0) = y_0$ und $p(\tilde{f}) = f$.

(b) Für jede Homotopie $F : I \times I \to X$ mit festen Endpunkten und jedes $\tilde{f}_0 : I \to Y$ mit $p(\tilde{f}_0) = F(\cdot, 0)$ gibt es genau eine Homotopie $\tilde{F} : I \times I \to Y$ mit festen Endpunkten, so dass $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{f}_0$ und $p(\tilde{F}) = F$.

Beweis. Wir zeigen allgemeiner folgende Aussage:

(c) Für jeden topologischen Raum Z, jedes stetige $F : Z \times I \to X$ und $\tilde{f}_0 : Z \to Y$ mit $p(\tilde{f}_0) = F(\cdot, 0)$ gibt es genau ein $\tilde{F} : Z \times I \to Y$ mit $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{f}_0$ und $p(\tilde{F}) = F$.

Dann folgt (a) mit $Z = \{y_0\}$, $F(y_0, t) = f(t)$, und $\tilde{f}_0(y_0) = y_0$. Für (b) sei $Z = I$. Für das eindeutige $\tilde{F}$ aus (c) muss man noch $\tilde{F}(0, t) = \tilde{f}_0(0)$ und $\tilde{F}(1, t) = \tilde{f}_0(1)$ für alle t zeigen. Dies folgt aus der Eindeutigkeit in (a), weil $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{F}(0, t)$ eine Hochhebung von $t \mapsto p(\tilde{F}(0, t)) = F(0, t) = F(0, 0)$ ist, also konstant wegen der Eindeutigkeit. Genauso ist $\tilde{F}(1, t)$ konstant.

Jetzt also der Beweis von (c). „Lokal“ ist das Hochheben einfach: Ist $(z_0, t_0) \in Z \times I$ und U eine trivial überlagerte Umgebung von $F(z_0, t_0)$, so gibt es $W \times T \in \mathcal{U}_{(z_0,t_0)}(Z \times I)$ mit $F(W \times I) \subseteq U$. Dann *wählt* man ein Blatt V über U und definiert $\tilde{F}$ auf $W \times T$ als $p|_V^{-1} \circ F$.

Der Beweis wird zeigen, dass man wegen der Anfangsbedingung $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{f}_0$ gar keine Wahlmöglichkeit für das Blatt hat!

(1) Zuerst zeigen wir: Für alle $z_0 \in Z$ gibt es ein offenes $W \in \mathcal{U}_{z_0}(Z)$ und $\tilde{F}_W$: $W \times I \to Y$ mit $p(\tilde{F}_W) = F|_{W \times I}$ und $\tilde{F}_W(\cdot, 0) = \tilde{f}_0|_W$.

Für alle $t \in I$ gibt es eine trivial überlagerte Umgebung U_t von $F(z_0, t)$, ein offenes $W_t \in \mathcal{U}_{z_0}(Z)$ und $a_t < t < b_t$, so dass $F(W_t \times [a_t, b_t] \cap I) \subseteq U_t$.

Wegen der Kompaktheit von I gibt es endlich viele $]a_{t_j}, b_{t_j}[$, die I überdecken, und durch Umbenennen finden wir $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ und $W = W_{t_1} \cap \ldots \cap W_{t_n} \in \mathcal{U}_{z_0}(Z)$, so dass $F(W \times [s_{j-1}, s_j]) \subseteq U_j$ mit einem trivial überlagerten U_j. Jetzt definieren wir $\tilde{F}$ induktiv auf $W \times [s_{j-1}, s_j]$, wobei wir womöglich W in jedem dieser Schritte noch verkleinern.

Wegen $p(\tilde{f}_0|_W) = F|_{W \times \{0\}} \subseteq U_1$ gibt es ein eindeutiges Blatt V_1 über U_1 mit $\tilde{f}_0(z_0) \in V_1$, und nach Verkleinern von W können wir $\tilde{f}_0(W) \subseteq V_1$ annehmen. Dann definieren wir $\tilde{F}_W : W \times [0, s_1] \to Y$ durch $\tilde{F}_W = p|_{V_1}^{-1} \circ F$.

Ist nun $\tilde{F}_W : W \times [0, s_k] \to Y$ schon definiert (für $k < n$), so gibt es genau ein Blatt V_{k+1} über U_{k+1} mit $\tilde{F}_W(z_0, s_k) \in V_{k+1}$, und nach Verkleinern von W können wir $\tilde{F}_W(W \times \{s_k\}) \subseteq V_{k+1}$ annehmen. Dann definieren wir $\tilde{F}_W : W \times [s_k, s_{k+1}] \to Y$ durch $\tilde{F}_W = p|_{V_{k+1}}^{-1} \circ F$. Dann ist $\tilde{F}_W$ auch auf $W \times [0, s_{k+1}]$ stetig.

(2) Als nächstes zeigen wir die Eindeutigkeit bei festem $z_0 \in Z$: Sind $\tilde{F}(z_0, \cdot), \tilde{G}(z_0, \cdot) : I \to Y$ zwei Hochhebungen von $F(z_0, \cdot)$ mit Anfangspunkt $\tilde{f}_0(z_0)$, so gilt $\tilde{F}(z_0, \cdot) = \tilde{G}(z_0, \cdot)$.

Wie eben seien $0 = s_0 < \cdots < s_n = 1$, so dass $f(z_0, [s_{j-1}, s_j]) \subseteq U_j$ trivial überlagert. Dann zeigen wir $\tilde{F}(z_{0,}.) = \tilde{G}(z_0, \cdot)$ auf $[0, s_k]$ durch Induktion. Für $k = 0$ ist dies vorausgesetzt, und wir nehmen dies für ein $k < n$ nun als Induktionsvoraussetzung an.

Sei $V_{k+1} \subseteq Y$ das Blatt über U_{k+1} mit $\tilde{F}(z_0, s_k) = \tilde{G}(z_0, s_k) \in V_{k+1}$. Wir zeigen dann $\tilde{F}(z_0, [s_k, s_{k+1}]) \subseteq V_{k+1}$. Ist nämlich $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ mit disjunkten offen V_α, so ist $[s_k, s_{k+1}] = \bigcup_\alpha \tilde{F}^{-1}(z_0, V_\alpha)$ eine disjunkte offene Zerlegung. Weil $[s_k, s_{k+1}]$ zusammenhängend ist, ist diese Zerlegung trivial, d.h. $\tilde{F}(z_0, \cdot)|_{[s_k, s_{k+1}]}$ hat Werte in einem einzigen Blatt, nämlich V_{k+1}. Genauso hat $\tilde{G}(z_0, \cdot)|_{[s_k, s_{k+1}]}$ Werte in V_{k+1}, und daher gilt

$$\tilde{F}(z_0, \cdot)|_{[s_k, s_{k+1}]} = p|_{V_{k+1}}^{-1} \circ F(z_0, \cdot) = \tilde{G}(z_0, \cdot)|_{[s_k, s_{k+1}]}.$$

(3) Wegen der Eindeutigkeit ist $\tilde{F}_{W_1} = \tilde{F}_{W_2}$ auf $(W_1 \cap W_2) \times I$, also ist $\tilde{F}$ auf $\bigcup W \times I$ durch $\tilde{F}(z, t) = F_W(z, t)$, falls $(z, t) \in W \times I$, wohldefiniert und stetig wegen $\tilde{F}|_{W \times I} = F_W$.

Dieses $\tilde{F} : Z \times I \to Y$ erfüllt $p(\tilde{F}) = F$ und $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{f}_0$. $\square$