J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
10.02.2011

Maß - und Integrationstheorie
Probeklausur

Diese Aufgaben werden am Donnerstag in den Übungen besprochen.
Diese finden am 17.02.2011 um 10:00 und 14:00 statt.
Die Probeklausur ist für mehr als 2 Stunden ausgelegt!

Aufgabe 1

Für $\alpha > 0$ sei $P : \mathbb{B} \to [0, \infty]$ definiert durch $P(A) = e^{-\alpha} \sum_{\substack{n=0,\\ n\in A}}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$. Zeigen Sie, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} x dP(x) \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}} x^2 dP(x).$$

Aufgabe 2
Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(K)$ von $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 3
Für $\alpha > 0$ sei P_α durch die Lebesgue-Dichte $f_\alpha(x) = \alpha e^{-\alpha x} I_{[0,\infty[}(x)$ gegeben. Berechnen Sie die Faltung $P_\alpha * P_\alpha$ und das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^x dP_\alpha(x)$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die unten definierte Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert

$$I_n = \int_{[-\sqrt{2n}, \sqrt{2n}]} \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n d\lambda(x).$$

Aufgabe 5

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{]0,\infty[\times]0,1[} e^{-x/y} d\lambda_2(x, y)$$

sowohl mit als auch ohne die Substitution $T(s, t) = (st, t)$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\leq 4\}} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x, y)$.

Aufgabe 6
Seien die Maße ν_n gegeben durch die (positiven) μ-Dichten $f_n \in \mathscr{L}_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, wobei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1$ konvergiere. Zeigen Sie, dass $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n$ ein endliches Maß ist mit $\nu \ll \mu$. Bestimmen Sie außerdem eine μ-Dichte von ν.

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass

$$F(t) = \int_{[0,1]} \frac{e^{-tx} - 1}{x} d\lambda_1(x)$$

eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert, und berechnen Sie deren Ableitung.

Aufgabe 8
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ messbar, so dass P^X die Lebesgue-Dichte $f(x) = e^{-x} I_{[0,\infty[}$ besitzt. Bestimmen Sie eine Lebesgue-Dichte von P^{X^2} und berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 dP^X \qquad \text{so wie} \qquad \int_{\mathbb{R}} x dP^{X^2}.$$

Aufgabe 9
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) \in]0, \infty[$. Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{F} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = 0 \text{ oder } \mu(A^c) = 0\}$$

eine σ-Algebra definiert und dass jede $(\mathscr{F}, \mathbb{B})$-messbare Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bereits μ-f.s. konstant ist.
Hinweis:
Betrachten Sie $c = \inf\{t \in \mathbb{R} : \mu(\{f > t\}) = 0\}$.