J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 15/16
08.02.2016

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Probeklausur

Die Aufgaben werden in der letzten Woche in den Übungen Di (16.02.16), 8:30-10 Uhr und Mi (17.02.16), 18:00-19:30 Uhr vorgerechnet.

Aufgabe 1
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $x_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n}$,

(b) $y_n = \dfrac{\exp(\sin(n^2))}{n^p}$, für $p \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(p) > 0$,

(c) $z_1 = 0$, $z_{n+1} = \frac{9+z_n^2}{6}$ (Tipp: Zeigen Sie $0 \leq z_n \leq 3$ und die Monotonie der Folge).

Aufgabe 2
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(\log(2n))^p}$ für $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 0$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} 3^{-k}$ (Tipp: $e < 3$).

Aufgabe 3
Untersuchen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} z^n$,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n}$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [1,\infty[\to [1,\infty[$, $x \mapsto x^x$ bijektiv ist und dass sowohl f als auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [1,\infty[\to [1,\infty[$ stetig sind.

Aufgabe 5
Entscheiden Sie jeweils anhand eines Beweises oder eines Gegenbeispiels, ob folgende Aussagen immer wahr sind. Dabei ist (X, d) ein beliebiger metrischer Raum.

(a) Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in X$, so ist f in jedem Punkt $\xi \in X$ stetig, in dem g stetig ist und $g(\xi) = 0$ gilt.

(b) Sind $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf X und $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, so ist das Urbild $f^{-1}(K)$ kompakt in X.

(c) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist beschränkt.

- Bitte wenden -

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(|x - y| + (x + y))$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie für einen metrischen Raum (X, d) und stetige Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$, dass $\max\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ stetig ist.

(c) Folgt aus der Stetigkeit von $\max\{f, g\}$ die von f und g?

Aufgabe 7

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0\ , \\ 0 & x = 0\ . \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist $f(I)$ ein Intervall.

(b) Ist f in jedem Punkt stetig?

Aufgabe 8

(a) Zeigen Sie, es gibt ein $x \in [0, 1]$ mit $(x^2 + 1)e^x = \pi$.

(b) Beweisen Sie für $a < b$, dass jede stetige Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.

Aufgabe 9

(a) Ist die Menge $A = \{z \in \mathbb{C} : |\exp(z^2)| \leq 1\}$ offen, abgeschlossen beziehungsweise kompakt? Skizzieren Sie A in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Für $M \subseteq \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $M_r := \{z \in \mathbb{C} : \exists x \in M \text{ mit } |z - x| < r\}$. Zeigen Sie M_r ist offen. Skizzieren Sie M_r für $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $r = 1/3$ in der Gaußschen Zahlenebene. Zeigen Sie ferner $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M_{1/n} = \overline{M}$.

Aufgabe 10

Zeigen Sie, die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{Re}(z)e^z$ ist surjektiv.
(Tipp: Polarkoordinaten und ZWS).
(Hier stand zuerst, die im Nachweis viel schwierigere Funktion $f(z) = ze^z$).