J. Wengenroth

Wintersemester 2013/14
28.01.2014

Einführung in die Mathematik
Probeklausur

Diese Aufgaben wurden 2010 als Klausur gestellt. Sie werden in den Tutorien in der Woche 3. - 7. Februar besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} k3^k = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}.$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $x_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n}$,

(b) $y_n = \frac{\exp(\sin(n^2))}{n^p}$ für $p \in \mathbb{C}$ mit $\Re p > 0$,

(c) $z_1 = 0$, $z_{n+1} = \frac{9+z_n^2}{6}$ (Tipp: Zeigen Sie $0 \leq z_n \leq 3$ und die Monotonie der Folge).

Aufgabe 3

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log(2n))^p}$ für $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 0$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} 3^{-k}$ (Tipp: $e < 3$).

Aufgabe 4

Untersuchen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ folgende Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} z^n$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n}$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [1, \infty[\to [1, \infty[, x \mapsto x^x$ bijektiv ist und dass sowohl f als auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [1, \infty[\to [1, \infty[$ stetig sind.

Aufgabe 6

Entscheiden Sie jeweils anhand eines Beweises oder eines Gegenbeispiels, ob folgende Aussagen immer wahr sind. Dabei ist (X, d) ein beliebiger metrischer Raum.

(a) Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in X$, so ist f in jedem Punkt $\xi \in X$ stetig, in dem g stetig ist und $g(\xi) = 0$ gilt.

(b) Sind $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf X und $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, so ist das Urbild $f^{-1}(K)$ kompakt in X.

(c) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abzählbarem Bild $f(\mathbb{R})$ ist konstant.