Universität Trier
Prof. Dr. J. Wengenroth

Trier, 16.07.2014

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Probeklausur

Die Klausur wird in den Tutorien nächste Woche (21. - 25. Juli) besprochen.

Aufgabe 1
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \exp(x^2)dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)}dx,$ (beachten Sie $\cos^2 = 1 - \sin^2$),

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(\zeta)}{\zeta}d\zeta$ für die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie die folgenden zwei Aussagen:

(a) $0 \leq x - \log(x + 1) \leq x^2/2$ für alle $x \geq 0$,

(b) $\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x)$ für alle $x > 0$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die Funktion $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}, z \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{x^z - 1}{\log(x)}dx$ differenzierbar ist und dass $F(z) - F(1) = \log(1 + z) - \log(2)$ für alle $z > 0$ gilt.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass

a) das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \cos(x^\alpha)dx$ für alle $\alpha > 1$ existiert aber für $\alpha = 1$ nicht,

b) die durch $x_n = \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\log(k)}\right) - \log(\log(n))$ Folge konvergiert.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $R(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^3(x+2)}$.

Aufgabe 6

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \exp(\langle\lambda, x\rangle)$. Bestimmen Sie in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ alle Richtungsableitungen und zeigen Sie $D_v f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lambda \perp v$.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \log(x^2 + y^2)$. Zeigen Sie, dass die Funktion g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ total differenzierbar ist und, dass $D_1(D_1 g) + D_2(D_2 g) = 0$ gilt.