J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
08.07.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Probeklausur

Diese Aufgaben dienen nur als Beispiel für eine Klausur in der Analysis einer und mehrerer Veränderlichen. Es ist nicht ausgeschlossen, dass andere Themenbereiche aus der Vorlesung in der eigentlichen Klausur ihren Platz finden.
Die Aufgaben werden im Tutorium am 13.07.2010 besprochen.

Aufgabe 1
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \int_0^1 x \arctan(x) dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 x^2 e^{-ix} dx, \qquad \text{(iii)} \int_{e^2}^{e^3} \frac{\log(x)\log(\log(x))}{x} dx.$$

Aufgabe 2
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x^2)}{1-\cos(x)}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x \to 0+} \frac{x^x - 1}{x \log(x)}.$$

Aufgabe 3
Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung von $R(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)(x-1)^2(x-2)}$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie für alle $p > 0$, dass das Integral $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\cos(x)}{x^p} dx$ existiert.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die Funktion $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch $F(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} dx$ differenzierbar ist mit $F = \pi/2 - \arctan$.
Hinweis:
Welche Ableitung hat $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$?

Aufgabe 6
Zeigen Sie für alle $-1 < \alpha < 0$ die Konvergenz der Folge

$$x_n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\log(n) - \frac{1}{\alpha+1}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha \log(k).$$

Aufgabe 7
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $\|f\| = 1$. Zeigen Sie für alle $x, v \in \mathbb{R}^n$, dass $\langle f(x), D_v f(x) \rangle = 0$, wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.