Das Pfannkuchen-Theorem.

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Borel-messbare und beschränkte Pfannkuchen. Dann gibt es einen geraden Schnitt, der A und B beide gerecht teilt, das heißt es gibt $v \in S^1$ und $t \in \mathbb{R}$, so dass für $H(v,t) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, v\rangle \geq t\}$ gilt

$$\lambda_2(A \cap H(v,t)) = \lambda_2(A)/2 \textit{ und } \lambda_2(B \cap H(v,t)) = \lambda(B)/2.$$

Beweis. $H(v,0)$ ist ein Halbraum in $\mathbb{R}^2$, dessen Rand eine Gerade durch 0 ist, die senkrecht auf v steht. $H(v,t)$ ist der um tv verschobene Halbraum. Wir beweisen den (einzig interessanten) Fall $\lambda_2(A) > 0$. Für jedes $v \in S^1$ sei

$$\tau(v) = \sup\{t \in \mathbb{R} : \lambda_2(A \cap H(v,t)) \geq \lambda_2(A)/2\}.$$

Wegen der Stetigkeitseigenschaften des Lebesgue-Maßes ist die Funktion $m(t) = \lambda_2(A \cap H(v,t))$ stetig und monoton fallend mit $m(t) \to \lambda_2(A)$ für $t \to -\infty$ und $m(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Deshalb ist $\tau(v)$ eine wohldefinierte Zahl mit $m(\tau(v)) = \lambda_2(A)/2$. Analog ist

$$\sigma(v) = \inf\{t \in \mathbb{R} : \lambda_2(A \cap H(v,t)) \leq \lambda_2(A)/2\}$$

wohldefiniert mit $m(\sigma(v)) = \lambda_2(A)/2$, und $H(v,\sigma(v))$ und $H(v,\tau(v))$ sind der *größte* beziehungsweise *kleinste* der Halbräume $H(v,t)$ mit Masse $\lambda_2(A)/2$. Wegen

$$H(-v,-t) = \{\langle x, -v\rangle \geq -t\} = \{\langle x, v\rangle \leq t\} = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus H(v,t)}$$

erhalten wir $\sigma(-v) = -\tau(v)$ und $\tau(-v) = -\sigma(v)$. Deshalb erfüllt

$$\mu(v) = (\sigma(v) + \tau(v))/2$$

die Bedingung $\mu(-v) = -\mu(v)$. Außerdem gilt $\lambda_2(A \cap H(v,\mu(v)) = \lambda_2(A)/2$. Wir zeigen gleich die Stetigkeit von $\mu : S^1 \to \mathbb{R}$. Dann ist auch

$$f : S^1 \to \mathbb{R},\ v \mapsto \lambda_2(B \cap H(v,\mu(v)))$$

stetig, und wegen der Mini-Version des Satzes von Borsuk-Ulam gibt es $v_0 \in S^1$ mit $f(v_0) = f(-v_0)$. Wegen $H(-v_0,\mu(-v_0)) = H(-v_0,-\mu(v_0)) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus H(v_0,\mu(v_0))}$ gilt dann $\lambda_2(B \cap H(v,\mu(v_0)) = \lambda_2(B \cap H(v,\mu(v_0)^c)$, das heißt der Halbraum $H(v_0,\mu(v_0))$ teilt auch die Menge B gerecht.

Für die Stetigkeit von $\tau : S^1 \to \mathbb{R}$ benutzen wir die Beschränktheit von A (die Stetigkeit von σ folgt dann aus $\sigma(v) = -\tau(-v)$). Weil sich parallele Geraden nur im Unendlichen schneiden, schneiden sich fast-parallele Geraden in A nicht. Genauer heißt das:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, v, w \in S^1, s, t \in \mathbb{R}$$
$$\|v - w\| < \delta \text{ und } s \leq t - \varepsilon \Longrightarrow H(v,t) \cap A \subseteq H(w,s)$$

So ein δ kann man im Fall $A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq c\}$ mit etwas Trigonometrie in Abhängigkeit von ε und c explizit bestimmen, weil man aber an dem bestmöglichen δ gar nicht interessiert ist, liefert auch ein Widerspruchsbeweis (für alle $\delta_n = 1/n$ gibt es $v_n, w_n \in S^1$, $s_n, t_n \in \mathbb{R} \ldots$) zusammen mit einem Kompaktheitsschluss diese Aussage. Indem wir sie auf $\varepsilon/2$ anwenden, finden wir auch ein $r \in]s, t[$ mit $H(v, t) \cap A \subseteq H(w, r)$.

Sind nun $\|v - w\| < \delta$, $t = \tau(v)$ und $s = \tau(w)$, so impliziert die Annahme $s \leq t - \varepsilon$, dass $H(v, t) \cap A \subseteq H(w, s) \cap A$, und die Tatsache, dass beide Mengen gleiches Maß $\lambda_2(A)/2$ haben, liefert, dass auch $H(w, r) \cap A$ Maß $\lambda_2(A)/2$ hat, im Wiederspruch zur Definition von $\tau(w)$ als Supremum.
Mittels Rollentausch führt auch die Annahme $s \geq t + \varepsilon$ zu einem Widerspruch. Also gilt $|\tau(v) - \tau(w)| < \varepsilon$. □