J. Wengenroth

Wintersemester 2014/15
07.01.2015

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 9

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 13. und 15. Januar 2015

A 41

(a) Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$. Zeigen Sie $\mathscr{L}_q(\mu) \subseteq \mathscr{L}_p(\mu)$ und $\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$ für alle $f \in \mathscr{L}_q(\mu)$.

Hinweis: Hölder-Ungleichung mit geeigneten Exponenten.

(b) Für alle $p \neq q$ finde man $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda_1) \setminus \mathscr{L}_q(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda_1)$.

Hinweis: Untersuchen Sie $f_\alpha(x) = x^\alpha I_{]0,1[}(x)$ und $g_\alpha(x) = x^\alpha I_{]1,\infty[}(x)$.

A 42

Seien ν, μ zwei endliche Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$. Zeigen Sie, dass es eine größte untere Schranke $\nu \wedge \mu$ gibt, also ein Maß mit $\nu \wedge \mu \leq \nu$, $\nu \wedge \mu \leq \mu$ und für jedes Maß σ mit $\sigma \leq \nu$ und $\sigma \leq \mu$ gilt $\sigma \leq \nu \wedge \mu$.
Hinweis: Wegen des Satzes von Radon-Nikodym für $\varrho = \nu + \mu$ kann man $\nu = f \cdot \varrho$ und $\mu = g \cdot \varrho$ darstellen. Dann definiere man $\nu \wedge \mu = (f \wedge g) \cdot \varrho$ und benutze 2.16(d).

A 43

Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{A}$ eine weitere σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes, dass es für jedes $f \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein $g \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{G}, P)$ gibt mit

$$\int_G f \, dP = \int_G g \, dP \text{ für alle } G \in \mathscr{G}.$$

(So ein g heißt *bedingte Erwartung von f unter $\mathscr{G}$*.)

A 44

Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$. Zeigen Sie

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass der Grenzwert existiert und dann, dass er für jedes $c < \|f\|_\infty$ größer als c ist.

A 45

Für $f \in \mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ seien $f_n = f I_{\{|f| \leq n\}}$. Zeigen Sie $f_n \in \mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $f_n \to f$ in $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.