J. Wengenroth Wintersemester 2014/15

10.12.2014

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 8

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 6. und 8. Januar 2015

A 36

(a) Zeigen Sie, dass die Faltung für endliche Maße ν, μ, σ auf $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_n)$ assoziativ ist, d.h.
$$\nu * (\mu * \sigma) = (\nu * \mu) * \sigma.$$

(b) Ist die Faltung σ-endlicher Maße wieder σ-endlich?

A 37

Sei $B(n,p)$ die Binomial-Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, d. h.
$$B(n,p)(A) = \sum_{k \in A \cap \mathbb{N}_0} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
Zeigen Sie $B(n,p) * B(m,p) = B(n+m,p)$.

A 38

Für ein endliches Maß ν auf $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_n)$ sei die Fourier-Transformierte definiert durch $\widehat{\nu}(t) = \int e^{i<t,x>} d\nu(x)$ für $t \in \mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle t, x\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\mu} t_k x_k$.
Zeigen Sie für endliche Maße ν und μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_n)$
$$\widehat{\nu + \mu} = \widehat{\nu} + \widehat{\mu},\ \widehat{\nu * \mu} = \widehat{\nu}\widehat{\mu} \text{ und } \widehat{\nu \otimes \mu}((s,t)) = \widehat{\nu}(s)\widehat{\mu}(t).$$

A 39

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $\int X^2 dP < \infty$ und $\int Y^2 dP < \infty$. Zeigen Sie, dass XY reell integrierbar ist und $\int XY dP = 0$.

A 40

Sei $R = R_1 \cup \cdots \cup R_n$ eine Zerlegung eines Rechtecks $R = [a,b] \times [c,d]$ in Rechtecke $R_1, \ldots, R_n$, die sich höchstens in den Rändern schneiden. Jedes der Rechtecke R_j besitzte eine Kante ganzzahliger Länge. Zeigen Sie, dass auch R eine Kante ganzzahliger Länge hat.
Hinweis. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $I_R \cdot \lambda_2$.