J. Wengenroth Wintersemester 2014/15
10.12.2014

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 7

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 16. und 18. Dezember

---

A 31
Seien $(\mathscr{X}, \mathscr{B}) = (\Omega, \mathscr{A}) = (]0,\infty[, \mathbb{B}_{]0,\infty[})$ und $f_\tau(x) = \tau e^{-\tau x}$ für $\tau \in \Omega$ und $x \in \mathscr{X}$ sowie $K(\tau, \cdot) = f_\tau \cdot \lambda_1$ die Exponentialverteilung mit Parameter τ.
Berechnen Sie für $\mu = f_1 \cdot \lambda_1$ eine λ_1-Dichte von $\mu \cdot K$.

A 32
Für $k \in \{1,2\}$ seien $(\Omega_k, \mathscr{A}_k, \mu_k)$ σ-endliche Maßräume und $f_k \in \mathscr{M}_+(\Omega_k, \mathscr{A}_k)$ seien reellwertig. Zeigen Sie:

(a) $\nu_k = f_k \cdot \mu_k$ sind σ-endlich.

(b) $\nu_1 \otimes \nu_2$ besitzt die $\mu_1 \otimes \mu_2$-Dichte $f_1 \otimes f_2$, wobei $f_1 \otimes f_2(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_1) f_2(\omega_2)$.

A 33
Seien ν die Kardinalität auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ und $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Zeigen Sie $D \in \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ und berechnen Sie die beiden iterierten Integrale

$$\int \int I_D(x,y) d\lambda_1(x) d\nu(y) \text{ und } \int \int I_D(x,y) d\nu(y) d\lambda_1(x).$$

Was bedeutet das für den Satz von Fubini?

A 34
Für $f \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ heißt $R(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le f(z)^2\}$ ein Rotationskörper.

(a) Warum?

(b) Zeigen Sie $\lambda_3(R(f)) = \pi \int f^2 d\lambda_1$.

A 35
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ messbar. Zeigen Sie $G(f) = \{(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : f(\omega) = y\} \in \mathscr{A} \otimes \mathbb{B}$ und $\mu \otimes \lambda_1(G(f)) = 0$.