Maß- und Integrationstheorie
Blatt 6

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 09. und 11. Dezember

A 26

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter τ , d.h. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist ein Maßraum, $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ist messbar und $P^X = f \cdot \lambda_1$ mit $f(x) = \tau e^{-\tau x} I_{]0, \infty[}(x)$.

- (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von P^X .
- (b) Berechnen Sie alle sogenannten Momente $E(X^n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
- (c) Bestimmen Sie eine λ_1 -Dichte von P^Y mit $Y = 1/X$.

A 27

Für ein endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ heißt die Funktion $\hat{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \int e^{itx} d\mu(x)$ Fourier-Transformierte von μ .

- (a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ stetig und beschränkt ist.
- (b) Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\int |x|^n d\mu(x) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ dann n -mal stetig differenzierbar ist.

A 28

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $V_m = \lambda_m(\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq 1\})$ das Volumen der m -dimensionalen euklidischen Kugel mit Radius 1. Zeigen Sie, dass $f_m(t) = mV_m t^{m-1} I_{]0, \infty[}(t)$ eine λ_1 -Dichte von $\lambda_m^{\|\cdot\|}$ ist, und berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) d\lambda_2((x, y)).$$

A 29

Seien ν und μ zwei Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu = f \cdot \mu$ für ein $f \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie

- (a) Jede μ -Nullmenge ist eine ν -Nullmenge,
- (b) Ist μ σ -endlich und f reellwertig, so ist ν ebenfalls σ -endlich,
- (c) Falls $\mu = g \cdot \nu$ mit einer Dichte $g \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$, so gilt $fg = 1$ μ -fast sicher.

A 30

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ sei bezüglich μ reell integrierbar. Zeigen Sie

- (a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $f_\varepsilon \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ beschränkt, so dass $\int |f - f_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$,
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{A}$ gilt $(\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon)$.

Hier noch eine kleine Ergänzung zu 2.20 (d) der Vorlesung, die man für das Beispiel 2.21 benötigt:

Satz. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Es gebe eine endliche Menge $E = \{a_0, \dots, a_n\}$, so dass $F|_{\mathbb{R} \setminus E}$ stetig differenzierbar ist. Für $f(x) = \begin{cases} F'(x) & : x \in \mathbb{R} \setminus E \\ 0 & : x \in E \end{cases}$ ist dann F die Verteilungsfunktion von $f \cdot \lambda_1$.

Beweis. Wir können $a_0 < \dots < a_m$ annehmen. Für $b > a_0$ setzen wir $m = \max\{k \in \{0, \dots, n\} : b > a_m\}$ (der Fall $b \leq a_0$ ist ähnlich aber leichter). Für $\nu = f \cdot \lambda_1$ gilt dann

$$(*) \quad \nu(] - \infty, b]) = \nu(] - \infty, a_0]) + \nu(]a_0, a_1]) + \dots + \nu(]a_m, b]).$$

Für $a_n \leq \alpha < \beta \leq a_{n+1}$ ist $\nu(\{\beta\}) = \int_{\{\beta\}} f d\lambda_1 = 0$, also

$$\begin{aligned} \nu(] \alpha, \beta]) &= \nu(] \alpha, \beta]) = \nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\alpha + 1/k, \beta - 1/k]\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu([\alpha + 1/k, \beta - 1/k]) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[\alpha + 1/k, \beta - 1/k]} f(x) d\lambda_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\alpha + 1/k}^{\beta - 1/k} F'(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} F(\beta - 1/k) - F(\alpha + 1/k) = F(\beta) - F(\alpha). \end{aligned}$$

Wegen $\nu(] - \infty, a_0]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(] - n, a_0]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_0) - F(-n) = F(a_0)$ liefert (*)

$$\nu(] - \infty, b]) = F(a_0) + F(a_1) - F(a_0) + \dots + F(b) - F(a_m) = F(b).$$

□