J. Wengenroth

Wintersemester 2014/15
26.11.2014

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 5

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 02. und 04. Dezember

---

A 21
Berechnen Sie für $t \in]0,\infty[$ das Integral

$$\int\limits_{]0,\infty[} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} d\lambda_1(x).$$

A 22
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$ reell integrierbar. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge

$$n \int \sin(f(\omega)/n)\, d\mu(\omega).$$

A 23
Seien $f : [0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ (und $f(0) = 1$) und $L(t) = \int\limits_{[0,\infty[} e^{-tx} f(x)\, d\lambda_n(x)$.

(a) Zeigen Sie $L(t) = \pi/2 - \arctan(t)$ für $t > 0$,

(b) f ist nicht λ_1-integrierbar.

A 24
Seien Ω eine Menge, $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ ein Messraum, $T : \Omega \to \mathscr{X}$ eine Abbildung und $\sigma(T) = \{T^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$ die initiale σ-Algebra. Zeigen Sie mit Hilfe des Approximationssatzes für $f : \Omega \to [0,\infty]$, dass

$$f \in \mathscr{M}_+(\Omega, \sigma(T)) \Longleftrightarrow \exists\, g \in \mathscr{M}_+(\mathscr{X}, \mathscr{B}) \text{ mit } f = g \circ T.$$

Was erhält man für $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ T(x) = |x|$?

A 25
Für einen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ sei $\mathscr{A}^* = \{B \subseteq \Omega : \exists\, A \in \mathscr{A} \text{ mit } I_B = I_A\ \mu\text{-f.s}\}$. Zeigen Sie

(a) $\mathscr{A}^*$ ist σ-Algebra.

(b) Durch $\mu^*(B) = \mu(A)$, falls $A \in \mathscr{A}$ mit $I_B = I_A$ μ-f.s., ist ein Maß auf $\mathscr{A}^*$ wohldefiniert.

(c) Für $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt

$$f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A}^*) \Longleftrightarrow \exists\, g \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A}) \text{ mit } f = g\ \mu\text{-f.s.}$$