J. Wengenroth Wintersemester 2014/15
19.11.2014

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 4

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 25. und 27. November

---

A 16
Seien $\Omega = \{0, \ldots, n\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, $p \in [0,1]$ und P das Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ für } k \in \Omega.$$

Zeigen Sie $P(\Omega) = 1$ und berechnen Sie $\int k \, dP(k)$ und $\int k^2 \, dP(k)$.

A 17
Sei P das Maß auf $(\mathbb{N}_0, \mathscr{P}(\mathbb{N}_0))$ mit $P(\{n\}) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ für einen Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie $\int n \, dP(n)$ und $\int (-1)^n dP(n)$.

A 18
Seien κ die Kardinalität auf $(\mathbb{N}_0, \mathscr{P}(\mathbb{N}_0))$ (also $\kappa(\{n\}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$) und $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass f genau dann bezüglich κ rell-integrierbar ist, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert, und dass dann $\int f \, d\kappa = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ gilt. Ist die Funktion $f(n) = (-1)^n/(n+1)$ bezüglich κ integrierbar?

A 19
Zeigen Sie, dass ein Maß μ auf $(\Omega, \mathscr{A})$ genau dann σ-endlich ist, wenn es eine überall strikt positive Funktion $f = \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$ gibt mit $\int f \, d\mu < \infty$.

A 20
Seien ν, μ zwei Maße auf $(\Omega, \mathscr{A})$ und $\varrho = \nu + \mu$. Zeigen Sie für jede ϱ-integrierbare Funktion $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$, dass

$$\int f \, d\varrho = \int f \, d\nu + \int f \, d\mu.$$

Gibt es Funktionen $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$, die bezüglich ν und μ integrierbar sind aber nicht bezüglich ρ?