J. Wengenroth | Wintersemester 2014/15
12.11.2014

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 3

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 18. und 20. November

---

A 11
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $M \in \mathscr{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\mu_M(A) = \mu(A \cap M)$ ein Maß auf $(M, \mathscr{A}_M)$ definiert ist.

(b) Berechnen Sie das Bildmaß μ^T für die Indikatorfunktion $T = I_M : \Omega \to \{0, 1\}$, $\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

A 12
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (also ein Maßraum mit $P(\Omega) = 1$) und $B \in \mathscr{A}$ mit $P(B) > 0$. Für $A \in \mathscr{A}$ heißt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B*. Zeigen Sie:

(a) Durch $A \mapsto P(A|B)$ ist wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert.

(b) Sind $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$, so gilt die Bayes-Formel

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c)}.$$

A 13
Seien P die Gleichverteilung auf $\{0, \ldots, 5\}^2$ (also das Maß auf der Potenzmenge mit $P(\{(j,k)\}) = 1/36$ für alle $j, k \in \{0, \ldots, 5\}$) sowie $S(j,k) = j + k$.
Berechnen Sie das Bildmaß P^S.

A 14
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $T : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathscr{X}, \mathscr{B})$ eine messbare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist das Bildmaß μ^T σ-endlich, so ist μ ebenfalls σ-endlich.

(b) Finden Sie ein Beispiel, in dem μ ein σ-endliches Maß ist aber μ^T nicht.

A 15
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) μ ist genau dann σ-endlich, wenn es paarweise disjunkte $F_n \in \mathscr{A}$ gibt mit $\mu(F_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

(b) Sind μ und F_n wie in (a) mit $\mu(F_n) > 0$, so ist durch

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap F_n)}{2^n \mu(F_n)}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ definiert, so dass für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt: $\mu(A) = 0 \iff P(A) = 0$.