J. Wengenroth Wintersemester 2014/15
05.11.2014

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 2

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 11. und 13. November

---

A 6
Sei $(K, \odot, \oplus)$ ein zweielementiger Körper, also $K = \{0, 1\}$ und insbesondere $1 \oplus 1 = 0$. Für zwei Abbildungen $f, g \in K^\Omega$ sind $f \odot g$ und $f \oplus g$ sowie $\max\{f, g\}$ argumentweise definiert. Für $A \subseteq \Omega$ ist die Indikatorfunktion I_A durch $x \mapsto \left\{ \begin{array}{lll} 1 & ; & x \in A \\ 0 & ; & \text{sonst} \end{array} \right.$ definiert und

$$\Phi : \mathscr{P}(\Omega) \to K^\Omega, A \mapsto I_A$$

ist (gemäß H 10, Einführung in die Mathematik) eine Bijektion. Zeigen Sie

(a) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \odot \Phi(B)$, $\Phi(A \cup B) = \max\{\Phi(A), \Phi(B)\}$ und $\Phi(A \triangle B) = \Phi(A) \oplus \Phi(B)$ mit $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(b) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\tilde{\mathscr{A}} = \{\Phi(A) : A \in \mathscr{A}\}$ folgende Bedingungen erfüllt

(1) $I_\emptyset \in \tilde{\mathscr{A}}$ und $I_\Omega \in \tilde{\mathscr{A}}$,
(2) $f, g \in \tilde{\mathscr{A}} \implies f \oplus g \in \tilde{\mathscr{A}}$,
(3) $f_n \in \tilde{\mathscr{A}} \implies \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \in \tilde{\mathscr{A}}$.

A 7
Seien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ zwei σ-Algebren über Ω.

(a) $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ oder $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ (Tipp: Andernfalls betrachte man $A \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ und $B \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{A}$ und berechne $A \triangle (A \triangle B)$ und $B \triangle (A \triangle B)$.).

(b) $\mathscr{E} = \{A \cap B : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$.

A 8
Sei $\emptyset \neq \mathscr{J} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ wie in A1 (also stabil unter abzählbaren Vereinigungen und Teilmengen), so dass

$$\sigma(\mathscr{J}) = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathscr{J} \text{ oder } A^c \in \mathscr{J}\}.$$

Wann ist durch $\mu : \sigma(\mathscr{J}) \to [0, \infty]$, $A \mapsto \left\{ \begin{array}{lll} 0 & ; & A \in \mathscr{J} \\ 1 & ; & A^c \in \mathscr{J} \end{array} \right.$ ein Maß definiert?

A 9
Für einen *Streckungsfaktor* $r > 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^m$ sei $rA = \{ra : a \in A\}$. Zeigen Sie

(a) $rA \in \mathbb{B}_m$ für alle $A \in \mathbb{B}_m$,

(b) Für alle $A \in \mathbb{B}_m$ gilt $\lambda_m(rA) = r^m \lambda_m(A)$.

Tipp: Für (a) zeige man, dass $\{A \in \mathbb{B}_m : rA \in \mathbb{B}_m\}$ eine σ-Algebra ist, die alle Rechtecke enthält. Für (b) überlege man sich, dass es reicht, die Aussage für Rechtecke zu zeigen.

A 10
Zeigen Sie für ein endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dass die *Verteilungsfunktion*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mu(]-\infty, x])$$

monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist (d.h. $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in [x, x+\delta[$ gilt $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$). Zeigen Sie außerdem, dass zwei endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit gleicher Verteilungsfunktion gleich sind.