J. Wengenroth

Wintersemester 2014/15
04.02.2015

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 13

Besprechung dieser Probeklausur in den Übungen am 10. und 12.2.

Aufgabe 61
Skizzieren Sie die Menge $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - \pi \leq \frac{y}{2} \leq |\sin(x)|, -\pi \leq x \leq \pi\right\}$ und berechnen Sie die Fläche $\lambda_2(H)$.

Aufgabe 62
Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int\limits_B x^2 d\lambda_2(x,y)$ mit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

b) $\int\limits_{]0,\infty[} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} d\lambda_1(y)$,

c) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} xy d\mu(x,y)$, wobei $\mu = f \cdot \lambda$ für $f(x,y) = e^{-(x+y)} I_{[0,\infty[^2}(x,y)$.

Aufgabe 63
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $X \in \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$ und $p \geq 1$. Zeigen Sie

$$\int\limits_\Omega X^p d\mu = p \int\limits_{]0,\infty[} t^{p-1} \mu(\{X \geq t\}) d\lambda_1(t).$$

Hinweis: Benutzen Sie $x^p = p \int\limits_0^x t^{p-1} dt$ und Fubini.

Aufgabe 64
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathscr{L}_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$x_n = n \int\limits_\Omega \arctan\left(\frac{f(\omega)}{n}\right) d\mu(\omega) \text{ konvergiert.}$$

Hinweis: Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$.

Aufgabe 65
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ messbar mit $P^X = \phi \cdot \lambda_1$, wobei $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Bestimmen Sie eine λ_1-Dichte von P^Y für $Y = \frac{1}{X^2}$.
Hinweis: Stellen Sie $F(t) = P(\{Y \leq t\})$ mit Hilfe von $\Phi(s) = P(\{X \leq s\})$ dar und differenzieren Sie.

Aufgabe 66
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $X \in \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\int X^2 d\mu < \infty$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : [0, \infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \int\limits_\Omega \exp(-tX) d\mu$$

zweimal stetig differenzierbar ist mit $F(0) = \mu(\Omega)$, $F'(0) = -\int X d\mu$ und $F''(0) = \int X^2 d\mu$.