J. Wengenroth

Wintersemester 2014/15
28.01.2015

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 12

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 03. und 05. Februar 2015

A 56
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Dann nennt man $E(X) = \int X dP$ Erwartungswert, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \int (X - E(X))(Y - E(Y)) dP$ Covarianz von X, Y und $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X)$ Varianz von X. Die Zufallsvariablen X, Y heißen unkorreliert, falls $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Zeigen Sie

(a) Sind $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ paarweise unkorreliert, so gilt

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k).$$

(b) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, P)^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser unkorrelierter Zufallsvariablen mit $E(X_n) = \mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sup\{\mathrm{Var}(X_n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, so gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \mu \text{ in } \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, P).$$

A 57
Berechnen Sie für $a, b, c > 0$ das Volumen $\lambda_3(E)$ des Ellipsoids

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}.$$

A 58
Seien $f \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$, $\mu = f \cdot \lambda_n$ und $T(x) = Ax + b$ mit einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass μ^T die λ_n-Dichte $g(y) = \frac{1}{|\det A|} f(A^{-1}(y-b))$ hat. Was passiert, wenn A nicht invertierbar ist?

A 59
Für $n+1$ Vektoren $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \left\{\sum_{k=1}^{n} c_k a_k : c_k \ge 0, \sum_{k=1}^{n} c_k = 1\right\}$$

der aufgespannte Simplex. Zeigen Sie

$$\lambda_n(S(a_0, a_1, \ldots, a_n)) = \frac{1}{n!}\det[a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0].$$

Hinweis. Reduzieren Sie die Aussage auf den Standardsimplex $S(0, e_1, \ldots, e_n)$ mit den Einheitsvektoren $e_k \in \mathbb{R}^n$, und berechnen Sie dessen Volumen mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

A 60
Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist durch $x \sim y$, falls $x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation definiert, deren Klassen wir mit $[x]$ bezeichnen. Zeigen Sie

(a) Es gibt eine Menge $E \subseteq [0,1]$, so dass $E \cap [x]$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ einelementig ist. Für verschiedene $q, r \in \mathbb{Q}$ ist dann $(E+q) \cap (E+r) = \emptyset$ und $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}} E + q$.

(b) $E \notin \mathbb{B}$.

(c) Es gibt kein Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ mit $\lambda(]a,b]) = b - a$ für alle $a \le b$.