J. Wengenroth Wintersemester 2014/15
21.01.2015

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 11

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 27. und 29. Januar 2015

A 51 (Maßvergleichssatz)
Seien $\mathscr{H}$ ein Halbring und ν, μ zwei Maße auf $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{H})$, die auf $\mathscr{H}$ σ-endlich sind. Zeigen Sie

(a) $(\mu|_{\mathscr{H}})^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$.

(b) Falls $\nu(H) \leq \mu(H)$ für alle $H \in \mathscr{H}$, so gilt $\nu(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$.

A 52 (Hausdorff-Maße)

(a) Seien μ_ε^* äußere Maße auf Ω mit $\mu_\varepsilon^*(A) \leq \mu_\delta^*(A)$ für alle $0 < \delta \leq \varepsilon$ und $A \subseteq \Omega$. Zeigen Sie, dass durch $\mu^*(A) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \mu_\varepsilon^*(A)$ wieder ein äußeres Maß definiert ist.

(b) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $\operatorname{diam}(A) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in A\}$. Zeigen Sie für $s \in]0, \infty[$, dass durch

$$H^s(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_k)^s : \operatorname{diam}(E_k) \leq \varepsilon, A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right\}$$

ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist, so dass für $s < t$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $H^s(A) < \infty \Rightarrow H^t(A) = 0$.

A 53 (Bernoulli-Folge)
Seien $\Omega = [0,1[, \mathscr{A} = \mathbb{B}_{[0,1[}$ und $P = \lambda_1|_{\mathscr{A}}$ sowie

$$A_n = \bigcup \{[k/2^n, (k+1)/2^n[: k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\} \text{ ungerade}\} \text{ und } X_n = I_{A_n}.$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$, dass

$$P(X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n) = 1/2^n.$$

So eine Folge von $\{0,1\}$-wertigen Zufallsvariablen heißt eine Bernoulli-Folge.

A 54 (Cantor-Verteilung)
Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Bernoulli-Folge auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ und $Z(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2X_n(\omega)/3^n$. Zeigen Sie

(a) Für $C = \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n/3^n : a_n \in \{0,2\} \right\}$ gilt $P(Z \in C) = 1$ und $\lambda_1(C) = 0$.

(b) $P(Z = z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

(c) Die Verteilungsfunktion $F(z) = P(Z \leq z)$ ist stetig.

(d) Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von P^z bezüglich λ_1.