J. Wengenroth | Wintersemester 2014/15
14.01.2015

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 10

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 20. und 22. Januar 2015

A 46
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\emptyset \neq A_n \in \mathscr{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ sowie $\mathscr{G} = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$.

(a) Zeigen Sie, dass jede $\mathscr{G}$-messbare Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{R}$ von der Form $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n I_{A_n}$ mit $c_n \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Für $f \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sei $g \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{G}, P)$ die bedingte Erwartung aus A 43. Bestimmen Sie die zugehörigen c_n in Fall $P(A_n) > 0$.

A 47
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $d : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to [0, \infty[$ definiert durch

$$d(A, B) = \mu(A \triangle B).$$

Zeigen Sie, dass d eine vollständige Halbmetrik auf $\mathscr{A}$ ist.

A 48
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $e_n \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, so dass $\langle e_n, e_m \rangle = \int e_n \bar{e}_m d\mu = \delta_{n,m}$ (also 0 für $n \neq m$ und 1 für $n = m$). Für $f \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ heißt $\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$ n-ter Fourier-Koeffizient von f bezüglich des Orthogonalsystems $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie

(a) $\left\| f - \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2 \leq \left\| f - \sum\limits_{n=1}^{N} c_n e_n \right\|_2^2$ für alle $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2$.

(c) Für alle Folgen von $c_n \in \mathbb{C}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ gibt es ein $f \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ mit $c_n = \hat{f}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

A 49
Seien $\mathscr{E} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$ und $\nu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ definiert durch $\nu(A) = 0$, falls A endlich, und $\nu(A) = \infty$, falls A^c endlich. Zeigen Sie, dass ν ein Inhalt ist und berechnen Sie das gemäß 5.1(c) definierte äußere Maß

$$\nu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) : E_n \in \mathscr{E}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right\} \text{ sowie } \mathscr{A}(\nu^*).$$

A 50
Zeigen Sie für zwei Halbringe $\mathscr{H}$ und $\mathscr{G}$ über Ω beziehungsweise $\mathscr{X}$, dass

$$\mathscr{P} = \{H \times G : H \in \mathscr{H}, G \in \mathscr{G}\}$$

wiederum ein Halbring ist. Ist $\mathscr{P}$ stabil unter Vereinigungen, wenn $\mathscr{H}$ und $\mathscr{G}$ es sind?