J. Wengenroth | Wintersemester 2014/15
29.10.2014

Maß- und Integrationstheorie
Blatt 1

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 4. und 6. November

---

A 1
Seien Ω eine Menge und $\mathscr{J}$ ein nicht leeres System von Teilmengen von Ω mit folgenden Eigenschaften

(1) $A \in \mathscr{J}$ und $B \subseteq A \Longrightarrow B \in \mathscr{J}$,

(2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{J}$ für alle Folgen $A_n \in \mathscr{J}$.

Zeigen Sie $\sigma(\mathscr{J}) = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathscr{J} \text{ oder } A^c \in \mathscr{J}\}$.

A 2
Bestimmen Sie $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathscr{E})$ für $\mathscr{E} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$.

A 3
Seien $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $M \subseteq \Omega$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}_M = \{A \cap M : A \in \mathscr{A}\}$ eine σ-Algebra über M ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}_M \subseteq \mathscr{A}$ genau dann gilt, wenn $M \in \mathscr{A}$.

(c) Für $M \subseteq \Omega$ ist die Abbildung

$$\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}_M \times \mathscr{A}_{M^c},\ A \mapsto (A \cap M, A \cap M^c)$$

genau dann bijektiv, wenn $M \in \mathscr{A}$.

(d) Für jede endliche σ-Algebra $\mathscr{A}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $\mathscr{A}$ genau 2^n Elemente hat.

A 4
Sei $\{M_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine Zerlegung von Ω, das heißt $M_j \neq \emptyset$, $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$ und $M_j \cap M_k = \emptyset$ für alle $j \neq k$.
Zeigen Sie $\sigma(\{M_j : j \in \mathbb{N}\}) = \left\{ \bigcup_{j\in J} M_j : J \subseteq \mathbb{N} \right\}$.

A 5
Für einen Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$ und $x \in \Omega$ sei $M_x = \bigcap\{A \in \mathscr{A} : x \in A\} = \{z \in \Omega : \text{für alle } A \in \mathscr{A} \text{ mit } x \in A \text{ gilt } z \in A\}$

(a) Für $x, z \in \Omega$ gilt $z \in M_x \Longleftrightarrow x \in M_z$.

(b) Für alle $x, y \in \Omega$ gilt entweder $M_x = M_y$ oder $M_x \cap M_y$.

(c) Für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt $A = \bigcup_{x\in A} M_x$.

(d) Es gibt keine unendliche abzählbare σ-Algebra.

Hinweis zu (d): Wegen (c) gibt es unendlich viele verschiedene M_x. Ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge mit verschiedenen (also disjunkten) M_{x_n}, so zeige man, dass die Abbildung $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{A}$, $N \mapsto \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{x_n}$ injektiv ist.