J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
23.12.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 9
Abgabe: Donnerstag, 13.01.2011, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 10.01.2011 um 12:00 statt.

T 1

Seien μ ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie, dass jedes $f \in \mathscr{L}_q(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ auch in $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ enthalten ist und die Ungleichung

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

erfüllt.
Hinweis:
Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung.

T 2

Finden Sie für jedes Paar $1 \leq p, q$ mit $p \neq q$ ein $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda_1) \setminus \mathscr{L}_q(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda_1)$.

T 3

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge in $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ eine Teilfolge besitzt, die μ-fast sicher konvergiert.

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 10:00-12:00 E10 und 14:00-16:00 E52
Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 13.01.2011, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden. Alle Aufgaben sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1

Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$mit $\left| \int fg d\mu \right| = \|f\|_2 \|g\|_2$
Zeigen Sie, dass es $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt mit $\alpha f + \beta g = 0$ μ-f.s..
Hinweis:
Berechnen Sie $\|f - \lambda g\|_2^2$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Es seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E = \{e_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int fg d\mu$ auf $\mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, das heißt für alle $n \neq m$ ist $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ und $\langle e_n, e_n \rangle = 1$. Für jedes $f \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ nennen wir $\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$ den n-ten Fourierkoeffizienten von f bezüglich E. Zeigen Sie

(a) $\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n \right\|_2^2 \leq \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \right\|_2^2$ für alle Folgen $c \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$,

(b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$ und

(c) für jede „Folge“ $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ gibt es ein $f \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ mit $\hat{f}(n) = z_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Hinweis:
Zu (a) $\left\langle f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n, \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \right\rangle$ und Pythagoras, zu (b) Pythagoras, zu (c) Riesz-Fischer.

Aufgabe 3
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $g \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $\mathscr{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathscr{A}$, also eine weitere σ-Algebra über Ω mit $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{A}$. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $h \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{G}, \mu)$ gibt, die für alle $f \in \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{G}, \mu)$ die Gleichung

$$\int fg d\mu = \int fh d\mu$$

erfüllt.
Hinweis:
Betrachten Sie die Abbildung $\Phi : \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{G}, \mu) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int fg d\mu$.

Aufgabe 4
Es sei $W : [0, 4[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = (\exp(2x) - 1) \left(\frac{I_{[0,1[}(x)}{e^3} + \frac{I_{[1,2[}(x)}{e^4} + \frac{I_{[2,3[(x)}}{2e^5} \right) + \frac{I_{[3,4[}(x)}{4}.$$

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion (zum Beispiel mit Matlab). Berechnen Sie zusätzlich das Volumen des Rotationskörpers

$$WB(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z < 4, \|(x, y)\| \leq f(z)\}$$

und skizzieren Sie diesen.
Eine Weihnachtsbaumkugel $WK(r)$ mit Radius r sei gegeben durch die Vereinigung des Zylinders $Z = \left\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \frac{5}{4}r, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}r\right\}$ mit der Kugel $\overline{B}(0, r)$. Berechnen Sie das Volumen von $WK(r)$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins 305. Primjahr!