J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
16.12.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 8
Abgabe: Donnerstag, 23.12.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben
Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 20.12.2010 um 12:00 statt.

T 1
Die Poisson-Verteilung $Po(\lambda)$ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit Parameter $\lambda \geq 0$ ist definiert durch

$$Po(\lambda)(A) = \sum_{n \in A \cap \mathbb{N}_0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Berechnen Sie für $\lambda, \mu \geq 0$ die Faltung $Po(\lambda) * Po(\mu)$.

T 2
Zeigen Sie, dass die Faltung $\lambda_1 * \lambda_1$ nicht σ-endlich ist.

T 3
Für ein endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit Träger in $[0, \infty[$ definieren wir die Laplace-Transformierte $\tilde{\mu}(t) : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\mu}(t) = \int\limits_{[0,\infty[} e^{-tx} d\mu(x).$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ auf $[0, \infty[$ differenzierbar ist, wenn $\int\limits_{[0,\infty[} x d\mu(x) < \infty$. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda \geq 0$.

Übungsaufgaben
Übungen: Donnerstag, 10:00-12:00 E10 und 14:00-16:00 E52
Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 23.12.2010, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Seien ν, μ und σ drei endliche Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$. Zeigen Sie die Gleichungen

$$(\nu * \mu) * \sigma = \nu * (\mu * \sigma) = (\nu \otimes \mu \otimes \sigma)^T,$$

wobei $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $T(x, y, z) = x + y + z$ definiert sei.

Aufgabe 2
Die Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ ist gegeben durch die Lebesgue-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Berechnen Sie die Faltung $N(0, 1) * N(0, 1)$ von zwei Standardnormalverteilungen.
Hinweis:
$(x - y)^2 + y^2 = x^2/2 + 2(x/2 - y)^2$

Aufgabe 3
Seien μ, ν zwei endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Zeigen Sie $\widetilde{(\nu * \mu)}(t) = \tilde{\nu}(t)\tilde{\mu}(t)$, und berechnen Sie zusätzlich die Laplace-Transformierte der

(i) Binomialverteilung $B(n, p)$ mit Parameter $p \in [0, 1]$ und

(ii) der Exponentialverteilung mit Parameter $\tau > 0$. Diese ist durch die Lebesguedichte $f(x) = \tau e^{-\tau x} I_{[0,\infty[}(x)$ definiert.

Aufgabe 4
Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit Träger in $[0, b]$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ unendlich oft differenzierbar ist und durch seine Taylor-Reihe um 0 dargestellt wird.