J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
09.12.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 7
Abgabe: Donnerstag, 16.12.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben
Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 13.12.2010 um 12:00 statt.

T 1
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume, sowie $f \in \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$ und $g \in \mathscr{M}_+(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ reellwertig. Wir definieren

$$f \otimes g : \Omega \times \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}} \text{ durch } f \otimes g(x, y) = f(x)g(y).$$

Zeigen Sie, dass $f \otimes g \in \mathscr{M}_+(\Omega \times \mathscr{X}, \mathscr{A} \otimes \mathbb{B})$ mit

$$(f \otimes g) \cdot (\mu \otimes \nu) = (f \cdot \mu) \otimes (g \cdot \nu).$$

T 2
Was besagt der Satz von Fubini für Doppelreihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m}$, wobei $x_{n,m} \in \mathbb{R}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$?

T 3
Berechnen Sie das Volumen der „Sanduhr“

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \sin^2(z), |z| \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Übungsaufgaben
Übungen: Donnerstag, 10:00-12:00 E10 und 14:00-16:00 E52
Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 13.12.2010, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

(i) Sei ν das Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ und $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ die Diagonale in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_D(x, y) d\lambda_1(x) d\nu(y) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_D(x, y) d\nu(x) d\lambda_1(y).$$

(ii) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$ reellwertig. Zeigen Sie, dass der Graph $G = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R} : f(\omega) = x\}$ von f in der Produkt σ-Algebra $\mathscr{A} \otimes \mathbb{B}$ liegt, und dass $\mu \otimes \lambda(G) = 0$.

Aufgabe 2
Für ein $f \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ definieren wir den Rotationskörper

$$K(f, n) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leq f(t)\}.$$

Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $\lambda_{n+1}(K(f, n))$ an. Skizzieren Sie darüber hinaus den Rotationskörper $S = \left\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq e^{-t^2}\right\}$ und berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(S)$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie

$$\int_{0+}^{1} \int_{0+}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \neq \int_{0+}^{1} \int_{0+}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx.$$

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ über $]0, 1] \times]0, 1]$ Lebesgue-intergrierbar?
Hinweis:
Betrachten Sie $D_1 D_2 g(x, y)$ für $g(x, y) = \arctan(x/y)$ auf $\mathbb{R} \times]0, 1]$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini, dass jedes $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ die Gleichung $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ erfüllt.
Hinweis:
Beweisen Sie, dass für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_R f d\lambda_2 = 0$ für alle Rechtecke R folgt $g = 0$.