J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
02.12.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 6
Abgabe: Donnerstag, 09.12.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben
Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 06.12.2010 um 12:00 statt.

T 1
Sei $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ eine Zufallsvariable, dessen Bildmaß P^X durch die Lebesgue-Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ gegeben ist. Bestimmen Sie eine λ_1-Dichte von P^{X^2}. (Diese heißt χ_1^2-Verteilung.)

T 2
Für $\tau > 0$ definieren wir $f_\tau(x) = \tau e^{-\tau x} I_{[0,\infty[}(x)$ und $f_\tau(x) = 0$ für $\tau \leq 0$. Weiterhin setzen wir für alle $\tau \in \mathbb{R}$ die Abbildung $K(\tau, A) = (f_\tau \cdot \lambda_1)(A)$. Zeigen Sie, dass K ein Kern von $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ nach $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ist und berechnen Sie eine λ_1-Dichte von $\mu \cdot K$, wobei $\mu = f_1 \cdot \lambda_2$.

T 3
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$. Zeigen Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 10:00-12:00 E10 und 14:00-16:00 E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 09.12.2010, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Maßraum und $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ eine Zufallsvariable für die das Bildmaß P^X die λ_1-Dichte $f = I_{[0,1]}$ habe. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und eine Lebesgue-Dichte von $P^{\sqrt{X}}$, und berechnen Sie $E(\sqrt{X}) = \int \sqrt{X} dP$.

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Maßraum und $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ eine Zufallsvariable für die das Bildmaß P^X die λ_1-Dichte $f = \frac{1}{\pi} I_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ habe. Bestimmen Sie für $Y = \sin(X)$ eine λ_1-Dichte von P^Y. Berechnen Sie außerdem $E(Y)$ sowie $E(Y^2)$.

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $V_n = \lambda_n (\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}) = \lambda_n (B_n(0,1))$, also als das Volumen der euklidischen Einheitskugel $B_n(0,1)$ in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie $\lambda_n (B_n(0,r)) = r^n V_n$, und berechnen Sie eine λ_1-Dichte von $\lambda_n^{\|\cdot\|}$. Zeigen Sie außerdem für $g \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\|x\|) d\lambda_n(x) = n V_n \int_{[0,\infty[} t^{n-1} g(t) d\lambda_1(t)$$

und berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) d\lambda_2(x,y)$.

Aufgabe 4

Seien ν, μ zwei Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$, wobei $\nu = f \cdot \mu$ für eine Funktion $f \in \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$. Zeigen Sie:

(i) für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$,

(ii) ist μ ein σ-endliches Maß und f reellwertig, so ist auch ν ein σ-endliches Maß,

(iii) falls es zusätzlich ein $g \in \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$ gibt mit $\mu = g \cdot \nu$, so folgt $fg = 1$ sowohl μ-fast sicher als auch ν-fast sicher.