J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
25.11.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 5
Abgabe: Donnerstag, 02.12.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 29.11.2010 um 12:00 im E52 statt.

T 1

Seien ν, μ zwei Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$. Wir definieren das Maß $\nu + \mu$ auf $\mathscr{A}$ durch $(\nu + \mu)(A) = \nu(A) + \mu(A)$. Zeigen Sie für alle $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$ die bezüglich $(\nu + \mu)$ intergrierbar sind die Identität

$$\int f d(\nu + \mu) = \int f d\nu + \int f d\mu.$$

Ist der linke Ausdruck wohldefiniert wenn man nur voraussetzt, dass f bezüglich ν und μ integrierbar ist?

T 2

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$ und ν das durch $\nu(A) = \int\limits_A f d\lambda_1$ definierte Maß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Dieses Maß heißt Cauchy-Verteilung. Zeigen Sie, dass $g = id_{\mathbb{R}}$ nicht ν-integrierbar ist.

T 3

Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$ eine reell integrierbare Funktion bezüglich μ. Zeigen Sie:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathscr{A} : \ \left(\mu(A) < \delta \Rightarrow \int\limits_A f d\mu < \varepsilon \right).$$

Hinweis:
Approximieren Sie f durch beschränkte Funktionen.

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 10:00-12:00 E10 und 14:00-16:00 E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 02.12.2010, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ so, dass die entsprechende Verteilungsfunktion F_μ nur reelle Werte annimmt. Zeigen Sie:

(i) Gilt $F_\mu = F_\nu$ für ein weiteres Maß ν auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, so folgt $\nu = \mu$.

(ii) F_μ ist genau dann stetig in x, wenn $\mu(\{x\}) = 0$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für alle $t > 0$ das Integral

$$\int_{[0,\infty[} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} d\lambda_1(x).$$

Hinweis:

Differenzieren.

Aufgabe 3

Seien μ ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung für $\int |f| d\mu < \infty$. Zeigen Sie die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \int n \sin\left(\frac{f(\omega)}{n}\right) d\mu(\omega).$$

Aufgabe 4

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $f_n, f : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ messbare Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast sicher. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine Menge $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$ mit den beiden Eigenschaften

(α) $\mu(\Omega \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ und

(β) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf A_ε gegen f

existiert.

Hinweis:

Finden Sie zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n(k)$, so dass die Menge $B_k = \bigcup_{m\geq n(k)} \left\{|f_m - f| \geq \frac{1}{k}\right\}$ Maß $\mu(B_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ hat.