J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
18.11.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 4
Abgabe: Donnerstag, 25.11.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 22.11.2010 um 12:00 im E52 statt.

T 1
Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = x^2$. Zeigen Sie, dass ein $f \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ genau dann $\sigma(h)$-messbar ist, wenn f gerade ist, also $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

T 2
Wir betrachten den Körper $\{0, 1\}$ mit der Addition $\oplus$, wobei 0 das neutrale Element sein soll und $1 \oplus 1 = 0$. Nach der Aufgabe 5 vom Blatt 2 zur Einführung in die Mathematik ist die Abbildung $\Phi : \mathscr{P}(\Omega) \to \{0, 1\}^\Omega, A \mapsto I_A$ eine Bijektion. Zusätzlich definieren wir für zwei Mengen $A, B \subseteq \Omega$ die symmetrische Differenz durch $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Zeigen Sie:

(i) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A)\Phi(B)$,

(ii) $\Phi(A \triangle B) = \Phi(A) \oplus \Phi(B)$ und $\Phi(A^c) = 1 \oplus \Phi(A)$.

Folgern Sie hieraus die Assoziativität von $\triangle$, sowie $A \triangle B^c = B^c \triangle A$.

T 3
Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum sowie $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den folgenden drei Eigenschaften:

- für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\omega \mapsto f(t, \omega)$ messbar bezüglich $(\mathscr{A}, \mathbb{B})$,
- für alle $\omega \in \Omega$ ist $t \mapsto f(t, \omega)$ stetig und
- es gibt ein $g \in \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\int\limits_\Omega g d\mu \le \infty$ und $|f(t, \omega)| \le g(\omega)$ für alle $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$.

Zeigen Sie, dass die durch $F(t) = \int\limits_\Omega f(t, \omega) d\mu(\omega)$ definierte Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Übungsaufgaben
Übungen: Donnerstag, 14:00-16:00 E52
Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 25.11.2010, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und die symmetrische Differenz $\triangle$ sei so definiert wie in der Aufgabe T2.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}^* = \{B \subseteq \Omega : \exists A \in \mathscr{A}$ mit $B \triangle A$ ist Nullmenge $\}$ eine σ-Algebra ist mit $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}^*$ und $N \in \mathscr{A}^*$ für alle μ-Nullmengen N.

(ii) Seien $A, C \in \mathscr{A}$ und $B \subseteq \Omega$ so, dass $B \triangle A$ und $B \triangle C$ Nullmengen sind. Zeigen Sie, dass die Werte $\mu(A)$ und $\mu(C)$ übereinstimmen. Das heißt gerade, dass durch $\mu^*(B) = \mu(A)$ ein Maß auf $\mathscr{A}^*$ definiert wird.

Aufgabe 2
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $(\mathscr{A}, \mathbb{B})$-messbarer Abbildungen $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} |g_n| d\mu$ konvergiert. Zeigen Sie, dass das Ereignis $E = \left\{ \omega \in \Omega : \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(\omega) \text{ divergiert} \right\}$ eine $\mathscr{A}$-Nullmenge ist, und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} g_n d\mu = \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu.$$

Aufgabe 3
Sei $T : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathcal{X}, \mathscr{B})$ eine messbare Abbildung, sowie $\sigma(T)$ die bereits eingeführte initiale σ-Algebra von T. Zeigen Sie, dass $S \in \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$ genau dann $(\sigma(T), \overline{\mathbb{B}})$-messbar ist, wenn man S als Verknüpfung $S = \varphi \circ T$ darstellen kann mit $\varphi \in \mathscr{M}_+(\mathcal{X}, \mathscr{B})$.
Hinweis:
Approximationssatz!

Aufgabe 4
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ genau dann σ-endlich ist, wenn eine strikt positive Funktion $f \in \mathscr{M}_+(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\int\limits_{\Omega} f d\mu < \infty$ existiert.