J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
11.11.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 3
Abgabe: Donnerstag, 18.11.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 15.11.2010 um 12:00 im E52 statt.

T 1
Seien $T_n : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass

$$A = \{\omega \in \Omega : \text{ die Folge } (T_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$$

ein messbares Ereignis ist, also $A \in \mathscr{A}$ gilt.

T 2
Seien $\Omega = \{0, ..., n\}$, $\mathscr{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $P(A) = \sum_{k\in A} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für ein $p \in [0,1]$. Berechnen Sie für $X = id_\Omega$ den „Erwartungswert" $\int X dP$ und das „zweite Moment" $\int X^2 dP$.

T 3
Für ein endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ definieren wir die zugehörige Verteilungsfunktion $F_\mu : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ durch $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$. Zeigen Sie, dass F_μ monoton wächst und rechtsseitig stetig ist (also $\lim_{x<y\to x} F_\mu(y) = F_\mu(x)$) mit $\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = \mu(\mathbb{R})$.

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 14:00-16:00 E52 und ???
Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 18.11.2010, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß das eindeutig definierte Maß auf $\mathbb{B}$ ist, das

(i) translationsinvariant ($\mu(M + x) = \mu(M)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{B}$) und

(ii) normiert ist ($\mu([0, 1[) = 1$).

Für $M \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist selbstverständlich $M + x = \{m + x : m \in M\}$.
Hinweis:
Berechnen Sie für $[0,1[= \bigcup_{1 \leq k \leq 2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[$ das Maß $\mu\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[\right)$.

Aufgabe 2
Berechnen Sie für $\Omega = \mathbb{N}_0$, $\mathscr{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $P(A) = \sum_{n \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ den Erwartungswert und das zweite Moment der Identität id_Ω auf Ω.

Aufgabe 3
Seien $\mathscr{E}, \mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ zwei Mengensysteme, sowie $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{E}), \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{F})$. Zeigen Sie, dass

(i) $\mathscr{G} = \{A \cap B : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ die σ-Algebra $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$ erzeugt,

(ii) $\mathscr{H} = \{E \cap F : E \in \mathscr{E}, F \in \mathscr{F}\}$ im Allgemeinen nicht $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$ erzeugt.

Wann gilt $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{H})$?

Aufgabe 4
Sei P eine Verteilung auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$, sowie $T : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ eine messbare Abbildung. Wir bezeichnen mit μ das Bildmaß P^T und mit $F = F_\mu$ die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ von μ. Zeigen Sie, dass diese Funktion Borel-messbar ist. Falls F stetig ist, zeige man

$$P^{F \circ T}(]a,b]) = b - a$$

für alle $0 \leq a < b < 1$ gilt. Das heißt gerade, dass $P^{F \circ T}$ die Gleichverteilung auf $[0,1]$ ist.
Hinweis:
Berechnen Sie $P^{F \circ T}([0,b])$ und zeigen Sie für $c = \sup\{t \in \mathbb{R} : F(t) = b\}$, dass $F(x) \leq b \Leftrightarrow x \leq c$.