J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
04.11.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 2
Abgabe: Mittwoch, 10.11.2010, 14.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 08.11.2010 um 14:00 im E52 statt.

T 1
Sei Ω eine überabzählbare Menge. Wir betrachten wieder die σ-Algebra

$$\mathscr{A} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mu(A) = \begin{cases} 1 & : A^c \text{ ist abzählbar} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ ein Maß auf $\mathscr{A}$ definiert.

T 2
Für eine Menge Ω und einen Messraum $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ seien $T : \Omega \to \mathscr{X}$ eine Abbildung und $\sigma(T)$ die intiale σ-Algebra. Zeigen Sie, dass für jeden weiteren Messraum $(M, \mathscr{M})$ und jede weitere Abbildung $S : M \to \Omega$ gilt:

$$S \text{ ist } (\mathscr{M}, \sigma(T))\text{-messbar} \Leftrightarrow T \circ S \text{ ist } (\mathscr{M}, \mathscr{B})\text{-messbar.}$$

T 3
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ ein Messraum und $T : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathscr{X}, \mathscr{B})$ eine messbare Abbildung. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ σ-endlich ist, falls $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mu^T)$ σ-endlich ist. Ist die Umkehrung richtig?

Übungsaufgaben

Übungen: Mittwoch, 16:00-18:00 HS 9 und Donnerstag, 14:00-16:00 E52
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 10.11.2010, 14:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum.

(i) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $T : \Omega \to \mathbb{R}^m$ genau dann $(\mathscr{A}, \mathbb{B}^m)$-messbar ist, wenn alle Koordinaten $T_j = \pi_j \circ T$ eindimensional $(\mathscr{A}, \mathbb{B})$-messbar sind.

(ii) Für eine beliebige Teilmenge M von Ω definieren wir die Spur σ-Algebra $\mathscr{A} \cap M = \{A \cap M : A \in \mathscr{A}\}$. Zeigen Sie, das $\mathscr{A} \cap M$ eine σ-Algebra ist und zwar die initiale σ-Algebra bzgl. der Einbettung $j : M \to \Omega, \omega \mapsto \omega$.

Aufgabe 2
Für $\alpha \neq 0$ sei $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $T(x) = x/\alpha$. Geben Sie ein Argument an, wieso T Borel-messbar ist und zeigen Sie $\lambda_m^T(A) = |\alpha|^m \lambda_m(A)$.
Hinweis:
Versuchen Sie NICHT diese Gleichheit explizit für alle Mengen $A \in \mathbb{B}_m$ nachzuweisen.

Aufgabe 3
Sei μ ein Maß auf der reellen Borel-σ-Algebra, das nur die Werte 0 und 1 annimmt. Zeigen Sie, dass μ bereits ein Dirac-Maß ist. Gilt diese Aussage auch für beliebige Messräume?
Hinweis:
Zeigen Sie die Existenz von $s = \inf\{y \in \mathbb{R} : \mu(]-\infty, y]) = 1\}$.

Aufgabe 4
Bei der Weihnachtsfeier einer Schulklasse mit n Kinder werden durch Wichteln Geschenke verlost. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einem Kind das selbst mitgebrachte Geschenk zugelost wird. Eine bestimmte Ziehung kann man dabei als Permutation auf $\{1, ..., n\}$ verstehen.
Zur Modellierung:
Betrachten Sie die Menge Ω aller Permutationen auf $\{1, ..., n\}$ als Ereignisraum versehen mit der Potenzmenge $\mathscr{A}$ als σ-Algebra. Das naheliegende Maß auf $\mathscr{A}$ wäre dann die Laplace Verteilung, also $\mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Für die Ereignisse $A_j = \{\pi \in \Omega : \pi(j) = j\}$ ist dann die „Wahrscheinlichkeit“ $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$ gesucht.

Hinweis:
Zeigen Sie, um $\mu\left(\bigcap_{j\in S} A_j\right)$ zu berechnen, dass es für $S \subseteq \{1, ..., n\}$ eine Bijektion zwischen $\bigcap_{j\in S} A_j$ und der Menge der Permutationen auf S^c gibt.