J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
03.02.2011

**Maß - und Integrationstheorie**
**Übungsblatt 13**
Abgabe: Donnerstag, 10.02.2011, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

---

**Tutoriumsaufgaben**
Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 07.02.2011 um 12:00 statt.

**T 1**
Berechnen Sie für $a, b, c > 0$ das Volumen des Ellipsoids

$$E_{a,b,c} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

**T 2**
Seien $(\Omega_n, \mathscr{A}_n, Q_n)$ Wahrscheinlichkeitsräume sowie $\Omega = \prod_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ und

$$\mathscr{A} = \sigma\left(\left\{A \times \prod_{k>n} \Omega_k : n \in \mathbb{N}, A \in \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n\right\}\right).$$

Zeigen Sie, dass es genau eine Verteilung $P$ auf $(\Omega, \mathscr{A})$ gibt mit

$$P\left(A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod_{k>n} \Omega_k\right) = \prod_{j=1}^{n} Q_j(A_j).$$

Beweisen Sie außerdem für $A_n \in \mathscr{A}_n$, dass die Menge $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ und

$$P\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} Q_n(A_n).$$

**T 3**
Zeigen Sie für $\alpha, \beta > 0$ die folgende Formel für die Gamma-Funktion

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha + \beta) \int_{]0,1[} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} d\lambda_1(x),$$

indem Sie $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ als iteriertes Integral schreiben. Betrachten Sie dann die Substitution $T : ]0, 1[\times]0, \infty[\to]0, \infty[^2, (x, y) \mapsto (xy, (1-x)y)$.

**Übungsaufgaben**

Übungen: Donnerstag, 10:00-12:00 E10 und 14:00-16:00 E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 10.02.2011, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

**Aufgabe 1**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie

$$\int f d\lambda_3 = \int\limits_{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} f\begin{pmatrix} s\cos(\alpha)\cos(\beta) \\ s\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ s\sin(\beta) \end{pmatrix} s^2\cos(\beta)d\lambda_3(s,\alpha,\beta)$$

mit der Substitutionsregel in $\mathbb{R}^3$.

**Hinweis:**

Die geeignete Substitution ist zwar keine Bijektion von $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$ nach $\mathbb{R}^3$, hat aber dichtes offenes Bild. Um dies zu zeigen helfen einerseits die Inklusion $T(\overline{M}) \subseteq \overline{T(M)}$ und andererseits eine doppelte Anwendung der Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$.

**Aufgabe 2**

Seien $(\Omega_n, \mathscr{A}_n, Q_n)$ Wahrscheinlichkeitsräume und $\Omega, \mathscr{A}$ und $P$ wie in Aufgabe T2. Darüber hinaus soll für $A_j \in \mathscr{A}_j$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_n(A_n)$ konvergieren. Zeigen Sie, dass das Ereignis

$$A = \{\omega \in \Omega : \{n \in \mathbb{N} : \omega_n \in A_n\} \text{ ist unendlich}\}$$

in $\mathscr{A}$ liegt und $P(A) = 0$ erfüllt.

**Hinweis:**

Schreiben Sie das gesuchte Ereignis als $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ mit geeigneten Mengen $B_n$.

**Aufgabe 3**

Seien $f \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathbb{B}_N)$ und $\mu = f \cdot \lambda_N$ sowie $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, x \mapsto Ax + b$ für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Zeigen Sie, dass $\mu^T$ die $\lambda_N$-Dichte

$$g = \frac{1}{|\det(A)|} f \circ T^{-1}$$

besitzt. Zeigen Sie außerdem, dass $\mu^T$ keine $\lambda_N$-Dichte besitzt, falls $A$ nicht invertierbar ist.

**Aufgabe 4**

Für $a_0, a_1, ..., a_N \in \mathbb{R}^N$ definieren wir den Simplex

$$S(a_0, a_1, ..., a_N) = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \lambda_n a_n : \lambda_j \geq 0, \sum_{n=0}^{N} \lambda_N = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie $\lambda_N(S(a_0, a_1, ..., a_N)) = \dfrac{1}{n!} |\det[a_1 - a_0, ..., a_N - a_0]|$.

**Hinweis:**

Reduzieren Sie das Problem auf den Fall $S(0, e_1, ..., e_N)$, und berechnen Sie dessen Maß mittels Induktion und Fubini.