J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
27.01.2011

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 12
Abgabe: Donnerstag, 03.02.2011, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 31.01.2011 um 12:00 statt.

T 1
Seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ oder A^c abzählbar $\}$. Wir definieren

$$\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty] \text{ durch } \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ \infty, & A^c \text{ abzählbar} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist mit $\mathscr{A}^* = \{A \triangle N : A \in \mathscr{A}, \mu^*(N) = 0\} \neq \mathscr{A}(\mu^*)$.

T 2
Für einen endlichen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ definieren wir $d : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to [0, \infty[$ durch $d(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Zeigen Sie, dass d die Dreiecksungleichung erfüllt und symmetrisch ist. Man nennt in diesen Fall $(\mathscr{A}, d)$ einen halbmetrischen Raum und d eine Halbmetrik. Zeigen Sie, dass diese Halbmetrik vollständig ist.

T 3
Sei μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}_d)$. Zeigen Sie, dass für alle Mengen $A \in \mathbb{B}_d$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ existieren mit $K \subseteq A \subseteq U$ und $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.
Hinweis:
Betrachten Sie das System der Borel-Mengen, die die obige Eigenschaft erfüllen.

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 10:00-12:00 E10 und 14:00-16:00 E52
Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 03.02.2011, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Sei μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit Verteilungsfunktion $F(x) = \mu(]-\infty, x])$. Zeigen Sie für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ die Gleichung

$$-\int F\varphi' d\lambda_1 = \int \varphi d\mu.$$

Hinweis:
Fubini. Im distributionellen Sinn gilt also gemäß 4.9 $F' = \mu$.

Aufgabe 2
Sei $F : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ eine monoton wachsende rechtsstetige Funktion und erfülle $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Zeigen Sie, dass ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ existiert, das die Verteilungsfunktion F hat.
Hinweis:
Betrachten Sie die durch $G(a) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq a\}$ definierte Funktion $G :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ und das Bildmaß von ν unter G für $\nu(A) = \lambda_1(A \cap]0, \infty[)$.

Aufgabe 3

(i) Sei $(\mu_\varepsilon^*)_{\varepsilon>0}$ eine monoton fallende Familie von äußeren Maßen auf Ω, d.h. für $0 < \delta < \varepsilon$ und $A \subseteq \Omega$ gilt $\mu_\varepsilon^*(A) \leq \mu_\delta^*(A)$. Zeigen Sie, dass $\mu^*(A) = \lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon^*(A)$ ein äußeres Maß auf Ω definiert.

(ii) Für $A \subseteq \mathbb{R}^d$ definieren wir $\operatorname{diam}(A) = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$ von A, wobei $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$ gesetzt wird. Zeigen Sie, dass für $s > 0$ durch

$$H^s(A) = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \left(\inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_n)^s : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \operatorname{diam}(B_n) < \varepsilon \right\} \right)$$

ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^d$ definiert ist. Man nennt H^s das s-dimensionale Hausdorff-Maß.

Aufgabe 4
Es seien $C_0 = [0, 1]$ und $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Wir definieren rekursiv C_{n+1} durch „wegwischen“ des mittleren Drittel seiner Teilintervalle: Wenn also C_n als disjunkte Vereinigung von 2^n Intervallen $I_{n,j} = \left[\frac{k_j}{3^n}, \frac{k_j+1}{3^n}\right]$ der Länge $\frac{1}{3^n}$ gegeben ist, setzen wir

$$C_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{2^n} \left[\frac{k_j}{3^n}, \frac{k_j}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{k_j}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}, \frac{k_j+1}{3^n}\right].$$

Betrachten Sie $C = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$, und zeigen Sie

(i) $\lambda_1(C) = 0$,

(ii) für alle Folgen $x \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in C$,

(iii) C ist nicht abzählbar.

Hinweis:
Betrachten Sie die Partialsummen, und untersuchen Sie C auf Abgeschlossenheit.