J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
20.01.2011

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 11
Abgabe: Donnerstag, 27.01.2011, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben
Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Montag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 24.01.2011 um 12:00 statt.

T 1
Ein Mengensystem $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ heißt Ring, falls

(R1) $\emptyset \in \mathscr{R}$,

(R2) $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{R}$,

(R3) $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \vartriangle B \in \mathscr{R}$.

Wieso ist ein Ring auch ein Halbring? Zeigen Sie für $A, B \in \mathscr{R}$, dass sowohl $A \setminus B \in \mathscr{R}$ als auch $A \cup B \in \mathscr{R}$.

T 2
Sei ν ein Inhalt auf dem Ring $\mathscr{R}$. Zeigen Sie, dass ν genau dann ein Prämaß ist, wenn für alle monotonen Folgen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{R}^{\mathbb{N}}$ mit $A_n \uparrow A \in \mathscr{R}$ gilt $\nu(A_n) \to \nu(A)$.

T 3
Sei Ω eine abzählbare unendliche Menge und $\mathscr{R} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\nu : \mathscr{R} \to [0, \infty], A \mapsto \begin{cases} 0, & A \text{ endlich} \\ \infty, & A^c \text{ endlich} \end{cases}$$

ein Inhalt auf dem Ring $\mathscr{R}$ definiert ist. Berechnen Sie das zugehörige äußere Maß v^*, das durch

$$\nu^*(A) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) : E_n \in \mathscr{R}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right\}$$

definiert ist. Was ist die zugehörige σ-Algebra $\mathscr{A}(\nu^*)$? Ist ν ein Prämaß?

Übungsaufgaben
Übungen: Donnerstag, 10:00-12:00 E10 und 14:00-16:00 E52
Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 27.01.2011, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Seien $\mathscr{H}, \mathscr{G}$ zwei Halbringe. Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{P} = \{H \times G : H \in \mathscr{H}, g \in \mathscr{G}\}$$

ein Halbring ist. Ist das Mengensystem $\mathscr{S} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Halbring?

Aufgabe 2
Für einen Halbring $\mathscr{H}$ definieren wir

$$\mathscr{R} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : n \in \mathbb{N}, A_1, ..., A_n \in \mathscr{H} \text{ paarweise disjunkt} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathscr{R}$ der kleinste Ring ist, der $\mathscr{H}$ enthält. Kann man auf das „paarweise disjunkt“ bei der Definition von $\mathscr{R}$ verzichten?

Aufgabe 3
Seien $\Omega =]0, 1]$ und $\mathscr{R} = \{]a, b] : 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{R}$ ein Halbring ist und dass

$$\nu : \mathscr{R} \to [0, \infty], \nu(]a, b]) = \begin{cases} b - a, & 0 < a < b \\ \infty, & 0 = a < b \\ 0, & a = b \end{cases}$$

ein Inhalt auf $\mathscr{R}$ aber kein Prämaß ist.

Aufgabe 4
Sei $\mathscr{H} = \{]a, b] \cap \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Wir setzen $\nu(]a, b] \cap \mathbb{Q}) = b - a$. Zeigen Sie, dass ν ein Inhalt ist und $\nu(A_n) \to \nu(A)$ für alle monotonen Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}^{\mathbb{N}}$ mit $A_n \uparrow A \in \mathscr{H}$. Berechnen Sie ν^* und die zugehörige σ-Algebra $\mathscr{A}(\nu^*)$. Ist ν ein Prämaß?