J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

WS 2010/11
25.10.2010

Maß - und Integrationstheorie
Übungsblatt 1

Abgabe: Donnerstag, 04.11.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Donnerstag im Tutorium besprochen.
Dieses findet am 28.10.2010 um 14:00 im E52 statt.

T 1
Zeigen Sie, dass durch

$$\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$ definiert ist.

T 2
Konstruieren Sie ein (möglichst einfaches) Gegenbeispiel, das zeigt, dass die Vereinigung von σ-Algebren nicht notwendigerweise wieder eine σ-Algebra ist.

T 3
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, sowie $A_1, ..., A_n \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A_1 \cup ... \cup A_n) < \infty$. Beweisen Sie die Siebformel

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{\emptyset \neq E \subseteq \{1,...,n\}} (-1)^{|E|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in E} A_j\right)$$

Wie kann man diese Summe vereinfachen, falls $\mu\left(\bigcap_{j \in E} A_j\right)$ nur von der Anzahl der Elemente in E abhängt?

Übungsaufgaben

Übungen: Montag, 12:00-14:00 E52 und Donnerstag, 14:00-16:00 E52
Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 04.11.2010, 12:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Sei $\{M_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine Zerlegung von Ω, d.h. $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$ mit $M_k \cap M_n = \emptyset$ für $k \neq n$. Zeigen Sie, dass $\left\{\bigcup_{j \in J} M_j : J \subseteq \mathbb{N}\right\}$ eine σ-Algebra über Ω ist und mit $\sigma\left(\{M_j : j \in \mathbb{N}\}\right)$ übereinstimmt.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die von $\mathscr{E} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ erzeugte σ-Algebra.
Hinweis:
Es handelt sich dabei nicht um die Potenzmenge von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3
Sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass durch $\mu_f(A) = \sum_{k \in A} f(k)$ ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ definiert ist. Zeigen Sie ferner, dass jedes Maß auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ in dieser Weise durch eine Abbildung dargestellt werden kann.
Hinweis:
Stellen Sie μ_f durch Dirac-Maße dar.

Aufgabe 4
Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum. Für $x \in \Omega$ definieren wir $M_x = \bigcap\{A : A \in \mathscr{A}, x \in A\}$ als den Schnitt aller Mengen aus $\mathscr{A}$, die x enthalten. Zeigen Sie:

(i) für $x, y \in \Omega$ gilt entweder $M_x = M_y$ oder $M_x \cap M_y = \emptyset$,

(ii) enthält die σ-Algebra $\mathscr{A}$ unendlich viele verschiedene Mengen, so gibt es auch unendlich viele verschiedene Schnitte,

(iii) es existiert keine unendliche aber abzählbare σ-Algebra .

Hinweis:
Zu (ii): Zeigen Sie für $I = \{M_x : x \in \Omega\}$ endlich die Beziehung $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(I)$.
Zu (iii): Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathfrak{P}(I) \to \mathscr{A}$ die durch $J \mapsto \bigcup J$ definiert wird und zeigen Sie deren Injektivität.