Elemente der Analysis II. Lösungen Übungsblatt 9

Ü41 $\nabla f(x,y,z) = [1, 1, -1]$

$\nabla \Phi(x,y,z) = [2x, 8y, 8z]$

Lagrange-Gleichungen
$$1 = 2\lambda x$$
$$1 = 8\lambda y$$
$$-1 = 8\lambda z$$

$\Rightarrow y = -z$ und $x = 4y$

Außerdem $1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16y^2 + 4y^2 + 4y^2 = 24y^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{1/24} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ oder $y = -\sqrt{1/24}$

Die kritischen Punkte sind also

$$a = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{24} \\ 1/\sqrt{24} \\ -1/\sqrt{24} \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} -4/\sqrt{24} \\ -1/\sqrt{24} \\ 1/\sqrt{24} \end{bmatrix}.$$

Wegen $f(a) = 6/\sqrt{24} = 6/2\sqrt{6} = \sqrt{6}/2$ und $f(b) = -\sqrt{6}/2$ wird das Maximum in a und das Minimum in b angenommen.

Ü42 $\nabla f(x,y,z) = (2, 1, 1)$

$\nabla \Phi_1(x,y,z) = [2x, 2y, 2z]$

$\nabla \Phi_2(x,y,z) = [1, 1, 1]$

Lagrange-Gleichungssystem
$$2 = 2\lambda_1 x + \lambda_2$$
$$\left.\begin{matrix} 1 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 1 = 2\lambda_1 z + \lambda_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\lambda_1 y = 2\lambda_1 z \underset{\lambda_1 \neq 0}{\Rightarrow} y = z$$

Mit $\Phi_1 = 4$ und $\Phi_2 = 1$ folgt $x^2 + 2y^2 = 4$ und $x + 2y = 1$

$\Rightarrow x = 1-2y$ und $(1-2y)^2 + 2y^2 = 4$, also

$1 - 4y + 4y^2 + 2y^2 = 4 \Leftrightarrow 6y^2 - 4y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \sqrt{11/18}$ oder $y = \frac{1}{3} - \sqrt{11/18}$

Die Kandidaten für Minimum und Maximum sind also

$$a = \begin{bmatrix} 1-2\left(\frac{1}{3}+\sqrt{11/18}\right) \\ 1/3 + \sqrt{11/18} \\ 1/3 + \sqrt{11/18} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1-2\left(1/3-\sqrt{11/18}\right) \\ 1/3 - \sqrt{11/18} \\ 1/3 - \sqrt{11/18} \end{bmatrix}$$

(Im Punkt $c = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ sind $\nabla\Phi_1(c)$ und $\nabla\Phi_2(c)$ nicht linear unabhängig aber $\Phi_1(c) \neq 4$). Durch Vergleich der Funktionswerte

$f(x) = 2x + 2y = 2 - 2y = 2(1-y)$ in a und b

folgt $f(a) =$ Minimum, $f(b) =$ Maximum

Ü43 $f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$ quadrierter Abstand

$\Phi_1(x,y,u,v) = (x/2)^2 + y^2 = 1$, $\Phi_2(x,y,u,v) = u + v = 4$

$\nabla f(x,y,u,v) = [2(x-u), 2(y-v), 2(u-x), 2(v-y)]$

$\nabla\Phi_1(x,y,u,v) = [\frac{x}{2}, 2y, 0, 0]$

$\nabla\Phi_2(x,y,u,v) = [0, 0, 1, 1]$

Lagrange-Gleichung $\nabla f(x,y,u,v) = \lambda_1 \nabla\Phi_1(x,y,u,v) + \lambda_2 \nabla\Phi_2(x,y,u,v)$

$= \left[\frac{\lambda_1}{2}x, 2\lambda_1 y, \lambda_2, \lambda_2\right]$

Also Gleichungssystem

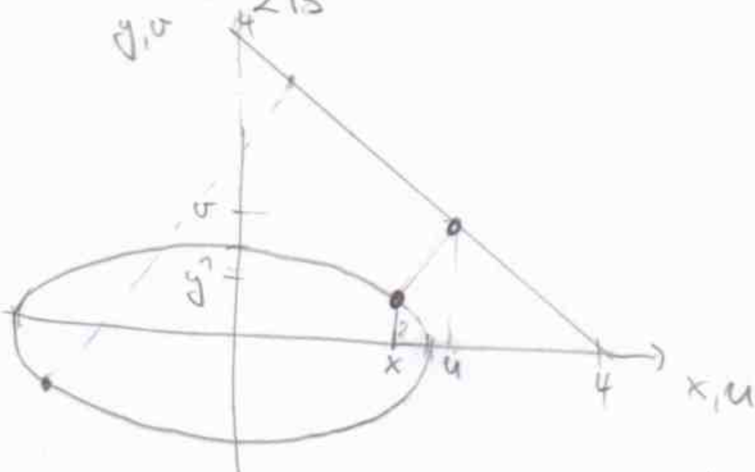
(1) $2(x-u) = \frac{\lambda_1}{2}x$
(2) $2(y-v) = 2\lambda_1 y$
(3) $2(u-x) = \lambda_2$
(4) $2(v-y) = \lambda_2$
(5) $(x/2)^2+y^2 = 1$
(6) $u+v = 4$

$\left.\begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (7)\ u-x = v-y \underset{\text{Gl. 1\&2}}{\Longrightarrow} x = 4y$

$\underset{(5)}{\Rightarrow} 5y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1/\sqrt5$ und $x = \pm 4/\sqrt5$

$\underset{(7)}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} u-v = y = \pm 1/\sqrt5 \\ u+v = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2u = 4 \pm 1/\sqrt5$

Also $u = 2 \pm \frac{1}{2\sqrt5}$ und $v = 2 \mp \frac{1}{2\sqrt5}$



Minimaler Abstand für $[x,y,u,v] = [4/\sqrt5, 1/\sqrt5, 2+1/(2\sqrt5), 2-1/(2\sqrt5)]$

nämlich die Wurzel aus $f(x,y,u,v) = \left(2-\frac{7}{2\sqrt5}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2\sqrt5}\right)^2$

Ü44 $\nabla f(x,y) = [1, 1]$

(a) $\nabla\Phi(x,y) = [2x, -2y]$

Lagrange-Gleichungen $1 = 2\lambda x$ und $1 = -2\lambda y$ sind in sehr vielen Punkten $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$ $(x\in\mathbb{R})$ erfüllt (z.B. mit $\lambda = 1$)

Wegen $f(x,-x) = 3$ aber
$f(x,x) \longrightarrow \pm\infty$ für $x \longrightarrow \pm\infty$ wird auf $\{\Phi(x,y)=0\}$
weder Maximum noch Minimum angenommen!

(b) $\nabla\Phi(x,y) = [2x, 2y] = [0,0]$ im <u>einzigen</u> zulässigen Punkt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. (Lagrange macht dann keine Aussage). Offenbar ist dann

$\max\{f : \phi = 0\} = \min\{f : \phi = 0\} = f(0,0) = 3$

<u>Ü45</u> (a) $D_j f(x_1,\dots,x_n) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} x_k$

$$\nabla\Phi(x_1,\dots,x_n) = [1/n,\dots,1/n]$$

Lagrange Gleichungen:

$$D_j f(x_1,\dots,x_n) = \lambda \frac{1}{n}.$$

Multiplikation mit x_j liefert $f(x) = \frac{\lambda}{n} x_j$, also $x_1 = \dots = x_n = 1$

$\Rightarrow \max\{f(x) : \Phi(x) = 1\} = 1$

(b) $y_1,\dots,y_n > 0$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j$. Definiere $x_j = y_j/\bar{y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = 1/n \sum_{j=1}^{n} y_j/\bar{y} = \bar{y}/\bar{y} = 1$$

$\overset{(a)}{\Rightarrow} \prod_{j=1}^{n} x_j \leq 1$ also $\prod_{j=1}^{n} y_j/\bar{y} = \left(\prod_{j=1}^{n} y_j\right)/\bar{y}^n \leq 1$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{n} y_j \leq \bar{y}^n \Rightarrow \left(\prod_{j=1}^{n} y_j\right)^{1/n} \leq \bar{y}.$$