Übungen Elemente der Analysis II, Lösungen Blatt 8

Ü36 Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : A \to B$ stetig differenzierbar auf A und $g : B \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf B $\Rightarrow$ $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar

Wegen der Kettenregel ist

$$\nabla(g\circ f)(x) = D(g\circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

$$= \nabla g(f(x)) \cdot \begin{bmatrix} D_1 f_1(x) & \cdots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \\ D_1 f_m(x) & \cdots & D_n f_m(x) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D_k(g\circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot \begin{bmatrix} D_k f_1(x) \\ \vdots \\ D_k f_m(x) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} D_j g(f(x)) D_k f_j(x)$$

Also Komposition ist $D_j g \circ f$ für jedes j stetig auf A und deshalb sind die Produkte $(D_j g \circ f)(D_k f_j)$ stetig und daher auch die Summe.

Ü37 $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$

Die Ableitung von $t \mapsto \sqrt{t} = t^{1/2}$ ist $\frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ für alle $t \neq 0$. Mit der Kettenregel folgt

$$D_1 f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y})\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \cos(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$D_2 f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Die partiellen Ableitungen sind (als Produkte von Kompositionen) auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig.

Weiter gilt $D_1 f(x,0) = \cos(|x|)\frac{x}{|x|}$ und daher

$D_1 f(\frac{1}{n},0) \longrightarrow 1$ und $D_1 f(-\frac{1}{n},0) \longrightarrow -1$.

Dies impliziert, dass f nicht stetig differenzierbar ist:

Andernfalls wäre $D_1 f(0,0) = \lim_{n\to\infty} D_1 f(\frac{1}{n},0) = 1$ und

$D_1 f(0,0) = \lim_{n\to\infty} D_1 f(-\frac{1}{n},0) = -1$ $\lightning$

(Tatsächlich ist f in 0 <u>nicht</u> partiell diff'bar)

<u>Ü38</u> Wir berechnen die Hesse-Matrix von $f(x,y) = x^2 - y^2$:

$\nabla f(x,y) = [2x, -2y]$

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. H_f ist weder positiv definit noch

negativ definit: $[1,0]\, H_f(x,y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 > 0$ und

$[0,1]\, H_f(x,y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 < 0$.

Weil Satz 6.5 eine Charakterisierung der Konvexität (Konkavität) ist folgt: Es gibt keine offene konvexe Teilmenge $A \neq \emptyset$ auf der f konvex oder konkav ist.

(Beachte den Unterschied zu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ ist Zerlegung von Intervallen (mit den Wendepunkten als Grenzen) auf denen f konvex oder konkav ist.)

Ü39 f ist zweimal stetig partiell differenzierbar (beachte, dass $2+\cos(y) \neq 0$ weil $\cos(y) \geq -1$), weil Kompositionen und Quotienten stetig diffbar sind.

Wegen des Satzes von Schwarz ist $D_1(D_2 f)(x,y) = D_2(D_1 f)(x,y)$

Es ist
$$D_1 f(x,y) = \frac{\cos(2x+\cos(y)x)}{2+\cos(y)}(2+\cos(y))$$
$$= \cos(2x+\cos(y)x).$$

Also $D_2(D_1 f)(x,y) = -\sin(2x+\cos(y)x) \times (-\sin(y))$.

Ü40 Ist g stetig differenzierbar mit $\nabla g = [f_1, \dots, f_n]$, so sind die partiellen Ableitungen $D_j g = f_j$ wieder stetig differenzierbar, also ist g zweimal stetig differenzierbar. Der Satz von Schwarz liefert also

$$D_k f_j(x) = D_k(D_j g)(x) = D_j(D_k g)(x) = D_j f_k(x).$$