Elemente der Analysis II, Lösungen Übungsblatt 7

Ü31 $f(r,\alpha) = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(r,\alpha) \\ f_2(r,\alpha) \end{bmatrix}$

$$Df(r,\alpha) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(r,\alpha) & D_2 f_1(r,\alpha) \\ D_1 f_2(r,\alpha) & D_2 f_2(r,\alpha) \end{bmatrix}$$

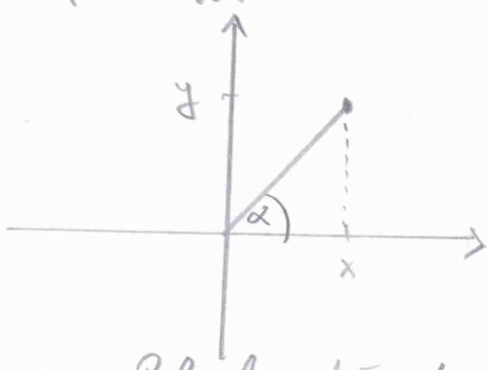
$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -r\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & r\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Wegen Ü14 ist eine Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ genau dann invertierbar wenn $ad \neq bc$, also $ad - bc \neq 0$.

Hier $ad - bc = r\cos(\alpha)^2 + r\sin(\alpha)^2 = r\left(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2\right)$
$= r$. Also $Df(r,\alpha)$ invertierbar für $r \neq 0$.

Geometrische Interpretation:

Jedes $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich als $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(r,\alpha)$ schreiben:



$r = \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+y^2}$

α = Winkel

Dies nennt man Polarkoordinatendarstellung

Ü32 $x, y \in A$, $\varphi : [0,1] \to A$, $t \mapsto x + t(y-x)$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) = g(1) - g(0)$ mit $g = f \circ \varphi$

$\underset{\text{MWS}}{=} g'(s)(1-0)$ für ein $s \in (0,1)$ $= f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$

$= \nabla f(\xi)\cdot(y-x)$ mit $\xi = \varphi(s) = x + s(y-x) \in A$.

Folgerung: A konvex, $f'(x) = 0$ für alle $x \in A \Rightarrow f$ konstant

<u>Ü33</u> f homogen vom Grad α heißt $f(tx) = t^\alpha f(x)$

(1) $f(0) = f(t\cdot 0) = t^\alpha f(0)$ für alle $t > 0$.

Ist $\alpha \neq 0$ so folgt $f(0) = 0$ (nur für $\alpha = 0$ ist dies keine Bedingung und dann ist $f(0)$ beliebig)

Für alle $x \neq 0$ ist $t = \|x\| > 0$ und $y = \frac{1}{\|x\|}x$ erfüllt $\|y\| = 1$. $\Rightarrow f(x) = f(ty) = t^\alpha f(y) = \|x\|^\alpha f(\frac{1}{\|x\|}x)$

Also ist $f(x)$ durch $f(\frac{1}{\|x\|}\cdot x)$ eindeutig bestimmt

(2) $\varphi(t) = f(tx)$ ist wegen der Kettenregel total differenzierbar

mit $\varphi'(t) = f'(tx)\cdot x = \nabla f(tx)\cdot x$ $(*)$

Andererseits ist $\varphi(t) = t^\alpha f(x)$ und daher

$\varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$ $(**)$.

Für $t = 1$ folgt aus $(*)$ und $(**)$ $\nabla f(x)\cdot x = \alpha f(x)$

<u>Ü34</u> $H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ streng positiv definit heißt

$\forall\, v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $[x,y]\cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} > 0$

$\Leftrightarrow [x,y]\cdot \begin{bmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{bmatrix} = ax^2 + bxy + bxy + cy^2$

$= ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ oder $y \neq 0$

Wir zeigen

(1) H streng positiv definit $\Rightarrow$ $a>0$ und $ac>b^2$:

Annahme $a \leq 0$ $\Rightarrow$ $[1,0] \cdot H \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = a \leq 0$ ↯

Also $a>0$.

Für festes $y \neq 0$ ist $x \longmapsto ax^2+2bxy+cy^2 = g(x)$ stets positiv

Wir minimieren: $g'(x) = 2ax+2by = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}y$

$$\Rightarrow 0 < g\left(-\frac{b}{a}y\right) = a\frac{b^2}{a^2}y^2 - 2b^2ay^2 + cy^2$$

$$= \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$$

$$\Rightarrow c - b^2/a > 0 \Rightarrow ac > b^2$$

(2) $a>0$ und $ac>b^2$ $\Rightarrow$ H streng positiv definit

Genauso: $g(x) \geq g(-b/a\, y) = (c-\frac{b^2}{a})y^2 > 0$ für $y \neq 0$.

Ü35 Mit der Kettenregel für Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ berechnen wir

$$D_1 f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$D_1 D_1 f(x,y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Genauso $D_2 f(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$ und $D_2 D_2 f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\Rightarrow D_1 D_1 f(x,y) + D_2 D_2 f(x,y) = 0$$

Bemerkung: Statt $D_1 D_1 f(x,y)$ schreibt man auch $D_1^2 f(x,y)$.

$D_1^2 f(x,y) + D_2^2 f(x,y) = \Delta f(x,y)$ heißt „Laplace-Operator angewendet auf f". Herausragende Rolle in Physik.