# Elemente der Analysis II : Lösungen Blatt 6

## Ü26

$f$ total differenzierbar

$\Rightarrow y \mapsto f(y) - f(x) - f'(x)\cdot(y-x)$ ist stetig in $x$, weil

$\| f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) \|_m \to 0$ für $y \to x$ sogar noch

wenn man durch $\|y-x\|_n$ teilt.

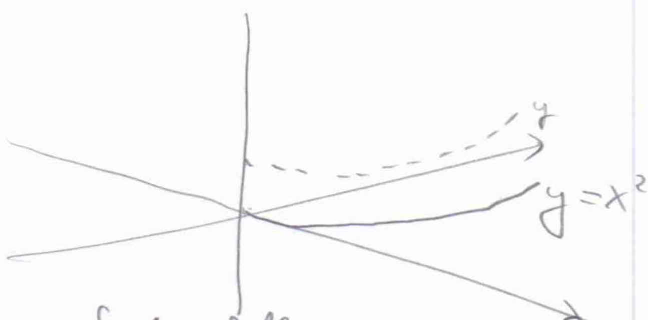
Die konstante Funktion $y \mapsto f(x) - f'(x)\cdot x$ ist stetig

und die lineare Funktion $y \mapsto f'(x)\cdot y$ ist stetig

$\Rightarrow y \mapsto f(y) = \big(f(y) - f(x) - f'(x)\cdot(y-x)\big) + \big(f(x) - f'(x)\cdot x\big) - f'(x)\cdot y$

ist stetig in $x$ als Summe stetiger Funktionen

## Ü27




Sei $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ eine Richtung. Dann ist

$$f_{0,v}(t) = f(tv_1, tv_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } tv_1 > 0 \text{ und } tv_2 = t^2 v_1^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } tv_1 > 0 \text{ und } t = v_2/v_1^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls also $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist $f_{0,v}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

und sonst ist $f_{0,v}(t) = 0$ für alle $t \neq v_2/v_1^2$

Insbesondere ist $f_{0,v} = 0$ auf dem Intervall $\left(-\frac{|v_2|}{v_1^2}, \frac{|v_2|}{v_1^2}\right)$

und deshalb ist $f'_{0,v}(0) = 0$.

Also: Alle Richtungsableitungen existieren und $D_v f(0) = 0$

Trotzdem ist $f$ nicht total differenzierbar, weil $f$ in $0$ unstetig ist:

Annahme $f$ stetig in $0$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$

ist stetig in $0$ $\Rightarrow t \mapsto f \circ \varphi(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

ist stetig in $0$, was offenbar nicht der Fall ist.

**Ü28** Für $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gilt

$$[x, y] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y] \cdot \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = ax^2 + bxy + cxy + dy^2$$

Für festes $y$ ist $x \mapsto ax^2 + bxy + cxy + dy^2$ ein Polynom 2. Grades und differenzierbar, also

$D_1 f(x, y) = 2ax + (b+c)y$. Für jedes $x$ ist $y \mapsto f(x, y)$ differenzierbar mit

$D_2 f(x, y) = 2dy + (b+c)x$.

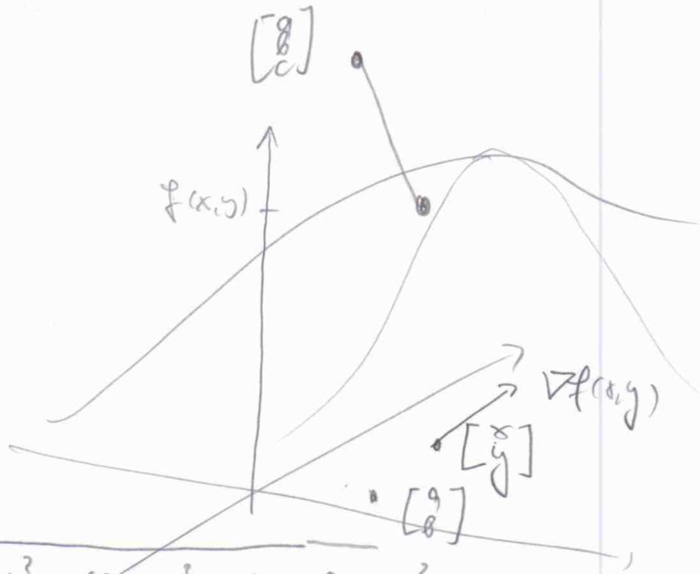
Also $Df(x, y) = \nabla f(x, y) = [2ax + (b+c)y, 2dy + (b+c)x]$

**Ü29** Nach Definition der Umkehrabbildung $f^{-1}$ von $f$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $f^{-1}(f(x)) = x$, also $f^{-1} \circ f = I$, wobei $I$ die identische Abbildung $x \mapsto x$ ist, deren Jacobi-Matrix die Einheitsmatrix $E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ ist.

Wegen der Kettenregel ist dann

$$E_n = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Also ist $f'(x)$ die inverse Matrix von $(f^{-1})'(f(x))$.




## Ü 30

Der Abstand zwischen $z = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix}$ ist

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-f(x,y))^2}$$

und der wird minimal genau dann, wenn der quadrierte Abstand $g(x,y) = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-f(x,y))^2$ minimal ist.

Notwendig dafür ist, dass $\nabla g(x,y) = 0$ gilt, also

$$0 = D_1 g(x,y) = 2(x-a) + 2(f(x,y)-c) \cdot D_1 f(x,y) \quad \text{und}$$

$$0 = D_2 g(x,y) = 2(y-b) + 2(f(x,y)-c)\, D_2 f(x,y) .$$

Mit $\alpha = -(f(x,y)-c)$ folgt also

$x - a = \alpha D_1 f(x,y)$ und $y - b = \alpha D_2 f(x,y)$, das heißt

$$\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} D_1 f(x,y) \\ D_2 f(x,y) \end{bmatrix}$$