Elemente der Analysis II : Lösungen Blatt 5

Ü21 Um von a_j nach c_ℓ zu fliegen muss man über b_1 oder b_2. Um von a_j nach b_1 zu fliegen, gibt es $a_{j,1}$ Verbindungen und von b_1 nach c_ℓ gibt es $b_{1,\ell}$ Verbindungen, so dass es insgesamt $a_{j,1} b_{1,\ell}$ Verbindungen von a_j über b_1 nach c_ℓ gibt.

Genauso: Es gibt $a_{j,2}\, b_{2,\ell}$ Flüge von a_j über b_2 nach c_ℓ

Insgesamt gibt es also $a_{j1} b_{1\ell} + a_{j2} b_{2\ell}$ Flüge von a_j nach c_ℓ

Dies ist gerade die Definition des (j,k)-ten Elements der Matrix $A \cdot B$, das heißt $A \cdot B$ ist die Tabelle (Matrix) die die Anzahl der Flüge von a_j nach c_ℓ angibt

Konkret
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

Ü22 Erinnerung: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen falls jeder Punkt x von A Mittelpunkt einer (kleinen) Kugel $K(x,r)$ ist, die ganz in A liegt, also
$$\forall_{x\in A}\ \exists_{r>0}\quad K(x,r) \subseteq A.$$

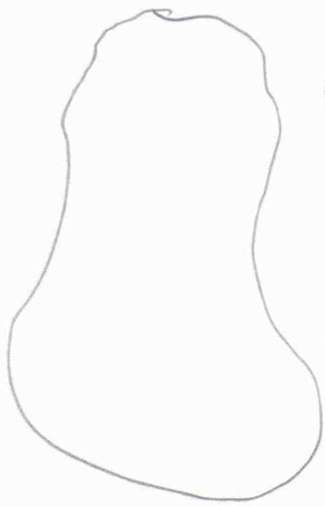
(a) Um zu zeigen dass $A \cap B$ für zwei offene Mengen A, B wieder offen ist betrachten wir einen beliebigen Punkt $x \in A \cap B$. Dann gibt es $r>0$ mit $K(x,r) \subseteq A$ und $s>0$ mit $K(x,s) \subseteq B$. Für $t = \min\{r,s\} > 0$ gilt dann $K(x,t) \subseteq K(x,r) \cap K(x,s) \subseteq A \cap B$. Also ist $A \cap B$ offen.

(b) Dies stimmt nicht: $A_k = K(0, \frac{1}{k})$ ist offen für jedes $k \in \mathbb{N}$, aber

$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{0\}$ ist nicht offen.

Ü23 (a)

$\overline{A}$



∂A

Es spielt keine Rolle, wie man die Grenzen auffasst

(b) $\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ$

Offenbar ist $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq (A \cup B)^\circ$ (Vorsicht: im Allgemeinen keine Gleichheit) und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

In der Tat, wir zeigen (1) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ und (2) $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

(1) $x \in \overline{A \cup B}$. Annahme $x \notin \overline{A}$ und $x \notin \overline{B}$ $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $K(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ und es gibt $\delta > 0$ mit $K(x, \delta) \cap B = \emptyset$. Für $\eta = \min\{\varepsilon, \delta\} > 0$ gilt dann $K(x, \eta) \subseteq K(x, \varepsilon) \cap K(x, \delta)$ und daher $K(x, \eta) \cap (A \cup B) = \emptyset$

(2) Offenbar gilt $C \subseteq D \Rightarrow \overline{C} \subseteq \overline{D}$ und damit $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ und $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Also $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Also:
$$\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ = (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)^\circ$$
$$\subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = (\overline{A} \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B})) \cup (\overline{B} \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}))$$
$$\subseteq (\overline{A} \setminus \mathring{A}) \cup (\overline{B} \setminus \mathring{B}) = \partial A \cup \partial B.$$

Ü24 $A: \forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 \; \forall y \in \mathbb{R}^n \; (\|x-y\|_n < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_m < \varepsilon)$

$B: \forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 \; \forall y \in \mathbb{R}^n \; (\|x-y\|_n \leq \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_m \leq \varepsilon)$

$A \Rightarrow B$: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen A gibt es eine Zahl $d > 0$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x-y\|_n < d \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$.

Wir setzen $\delta = \frac{d}{2}$. Ist nun $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x-y\| \leq \delta$ so gilt $\|x-y\|_n < d$ und deshalb $\|f(x)-f(y)\|_m < \varepsilon$. Insbesondere ist dann $\|f(x)-f(y)\|_m \leq \varepsilon$

$B \Rightarrow A$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $e = \varepsilon/2 > 0$ und wegen B gibt es $\delta > 0$, so dass $\|x-y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_m \leq e$.

Ist nun $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x-y\|_n < \delta$ so gilt insbesondere $\|x-y\|_n \leq \delta$ und daher $\|f(x)-f(y)\|_m \leq e < \varepsilon$.

Ü25 „Ausgeschrieben" ist $f(x,y) = (c_{0,0} + c_{0,1}y + c_{0,2}y^2 + \dots + c_{0,m}y^m)$

$+ (c_{1,0}x + c_{1,1}xy + \dots + c_{1,m}xy^m) + \dots + (c_{n,0}x^n + \dots + c_{n,m}x^n y^m)$

Sei $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung. Dann ist

$$f_{0,v}(t) = f(0 + tv) = f(ta, tb) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} c_{j,k} (ta)^j (tb)^k$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} c_{j,k} a^j b^k t^{j+k}$$

Wegen $(t^p)' = p t^{p-1}$ und $p\,0^{p-1} = \begin{cases} 0 & p \neq 1 \\ 1 & p = 1 \end{cases}$ erhalten wir $D_v f(0) = f_{0,v}'(0) = \sum_{j+k=1} c_{j,k} a^j b^k = c_{0,1} b + c_{1,0} a$