Elemente der Analysis II : Lösungen Übungsblatt 4

Ü16 Nach Voraussetzung gilt $\langle u_j, u_k \rangle = 0$ für $j \neq k$ und $\langle u_j, u_j \rangle = \|u_j\|^2 = 1$. Sei nun $A = [u_1, \dots, u_n]$. Wir suchen $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A \cdot B = E_n$, was nach 3.17 (c) äquivalent ist zu $B \cdot A = E_n$. Hat B die Zeilen $v_1, \dots, v_n$ so ist das Element der j-ten Zeile und k-ten Spalte von $B \cdot A$ die Zahl $\langle v_j, u_k \rangle$ und das entsprechende Element von E_n ist 0 falls $j \neq k$ beziehungsweise 1 falls $j = k$. Also erfüllen $v_j = u_j$ (oder genauer: der Zeilenvektor mit den gleichen Komponenten wie u_j) die Bedingung $B \cdot A = E_n$

Ü17 Nach Satz 3.18 ist eine quadratische Matrix A genau dann invertierbar falls alle LGS$_{n \times n}$ $A \cdot x = e^k$ lösbar sind, und dann sind die Lösungen die Spalten von A^{-1}.
Wir müssen also 3 LGS lösen

		1. LGS	2. LGS	3. LGS
$x_1 + 2x_2 + x_3$	$=$	1	0	0
x_1	$=$	0	1	0
$2x_1 + 4x_2$	$=$	0	0	1

Lösung 1. LGS $\quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{2x_1}{4} = 0, \quad x_3 = 1$

2. LGS $\quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{2x_1}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -x_1 - 2x_3 = 0$

3. LGS $\quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}$

A ist also invertierbar mit $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Ü18 f ist überall stetig („Grund" dafür: Die beiden Fälle stimmen für $x_2 = 0$ überein)

Seien $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$ eine beliebige Outputtoleranz

Wir setzen $\delta = \varepsilon/3$ (das sieht man am Ende des Beweises)

Sei $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Input mit $\|x - y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$
$< \delta$

$\Rightarrow |x_1 - y_1| < \delta$ und $|x_2 - y_2| < \delta$

1. Fall $x_2 > 0$ und $y_2 > 0$

$\Rightarrow d_1(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |(x_1+x_2) - (y_1+y_2)|$
$\leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < 2\delta$

2. Fall $x_2 \leq 0$ und $y_2 \leq 0$

$\Rightarrow d_1(f(x), f(y)) = |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| \leq |x_1 - y_1| + |y_2 - x_2| < 2\delta$

3. Fall $x_2 > 0$ und $y_2 < 0$. Wegen $|x_2 - y_2| < \delta$ ist dann
$x_2 < x_2 - y_2 < \delta$ und $|y_2| = -y_2 < x_2 - y_2 < \delta$. Also

$d_1(f(x), f(y)) = |(x_1 + x_2) - (y_1 - y_2)| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 + y_2|$
$< \delta + \delta + \delta = 3\delta$

4. Fall Genauso: $x_2 \leq 0$ und $y_2 > 0 \Rightarrow d_1(f(x), f(y)) < 3\delta$.

Ü19 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Zu zeigen ist, dass $B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in A\}$ wieder offen ist (B ist das Urbild von A unter f, FA I)

Sei also $x \in B$. Weil $f(x) \in A$ gilt und A offen ist, gibt eine kleine Kugel mit Mittelpunkt $f(x)$ die ganz in A liegt, das heißt es gibt $\varepsilon > 0$ mit $K(f(x), \varepsilon) \subseteq A$ (wobei $K(f(x), \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^m : d_m(f(x), z) < \varepsilon\}$. Zu dieser „Output-Toleranz" gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(d_n(x,y) < \delta \Rightarrow d_m(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Dann liegt die Kugel $K(x, \delta)$ ganz in B:

Ist nämlich $y \in K(x, \delta)$ so gilt $d_n(x,y) < \delta$ und daher $d_m(f(x), f(y)) < \varepsilon$, so dass $f(y) \in K(f(x), \varepsilon) \subseteq A$. Nach Definition von B folgt $y \in B$.

Ü20 Diese Aufgabe ist für die Ökonomie nicht so sehr interessant sondern deutet an, welche Rolle stetige Funktionen bei der geometrischen Vorstellung spielen, dass man zwei Mengen „ohne Schnitte und Zerreißen" ineinander verformen kann.

A, B heißen homöomorph, falls es eine bijektive Abbildung $f: A \to B$ gibt, so dass sowohl f als auch $f^{-1}: B \to A$ stetig sind.

(a) $A = K(a, r)$, $B = K(b, R)$ $(r, R > 0,\ a, b \in \mathbb{R}^n)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \longmapsto b + \frac{R}{r}(x - a)$ ist stetig („besteht aus stetigen Bausteinen") und injektiv (weil $f(x) = f(y) \Rightarrow$

$b + \frac{R}{r}(x-a) = b + \frac{R}{r}(y-a) \Rightarrow x = y$)

mit $f(A) \subseteq B$ (weil $d_n(b, f(x)) = \|b - f(x)\|_n$

$= \|- \frac{R}{r}(x-a)\| = \frac{R}{r}\|x-a\|_n < R$).

Schließlich $B \subseteq f(A)$: Sei $y \in B$. Wir lösen die Gleichung

$y = f(x) = b + \frac{R}{r}(x-a)$ nach x auf und erhalten

$x = a + \frac{r}{R}(y-b)$. Wie oben sieht man $x \in A$ und

daher $y = f(x) \in f(A)$.

Wir haben ausgerechnet $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto a + \frac{r}{R}(y-b)$

und diese Abbildung ist stetig.

(b) Es gibt noch nicht einmal eine stetige und surjektive Abbildung $f: [0,1] \to [0,1] \cup [2,3]$ weil wegen des Zwischenwertsatzes $f([0,1])$ „keine Löcher hat" das heißt ein Intervall ist. Offenbar ist $[0,1] \cup [2,3]$ kein Intervall.

(c) Wir begnügen uns mit einem intuitiven Argument: Aus $[0,1]$ kann man die Punkte 0 und 1 herausnehmen und man behält ein Intervall. Nimmt man aber aus $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ zwei Punkte heraus, so zerfällt die Kreislinie in zwei Teile, die man nicht durch „eine stetige Kurve verbinden kann".