Elemente der Analysis II, Lösungen Übungsblatt 3

Ü11 Für $p \in \mathbb{N}$ gilt $f(px) = f(x + \dots + x) = f(x) + \dots + f(x) = p f(x)$

Außerdem $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2 f(0)$, so dass $f(0) = 0$ sowie

$0 = f(0) = f(-px + px) = f(-px) + f(px) = f(-px) + p f(x)$, was

$f(-px) = -p f(x)$ impliziert. Für $q \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$

folgt schließlich

$$q f\left(\frac{p}{q} x\right) = q f\left(p \frac{1}{q} x\right) = q p f\left(\frac{1}{q} x\right) = p f\left(q \frac{1}{q} x\right) = p f(x)$$

also $f\left(\frac{p}{q} x\right) = \frac{p}{q} f(x)$.

Bemerkung: Es gibt (sehr komplizierte) Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, die NICHT linear sind.

Ü12 $LGS_{4 \times 3}$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\} Px = y$$

I_4 Keine Vertauschung

II_4 $\alpha_1 = 1$ (addiere letzte Zeile zur ersten)

$\alpha_2 = -1$ (" − letzte Zeile zur zweiten)

$\alpha_3 = -2$ (addiere -2 letzte Zeile zur dritten)

Neues $LGS_{3 \times 2}$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 &= -2 \\ -2x_1 + 3x_2 &= -2 \end{aligned}\right\} \tilde{P} x = \tilde{y}$$

III Löse kleineres LGS $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -3$

Neues LGS $2x_1 = 2$

$4x_1 = 4$

Lösung $x_1 = 1$

Lösung von $\tilde{P} x = \tilde{y}$ ist also $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. IV Lösung $x_1 = 1, x_2 = 0$, $x_3 = 1$

Ü13 Sei $z \in \mathbb{R}^m$ so dass es $u, v \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $P \cdot u = z$ und $P \cdot v = z$

$$\Rightarrow P \cdot (u - v) = P \cdot u - P \cdot v = z - z = 0$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $P \cdot x = y$

$$\Rightarrow P \cdot (x + u - v) = P \cdot x + P \cdot (u - v) = y + 0 = y$$

Also ist $x + (u - v)$ ebenfalls eine Lösung, die wegen $u - v \neq 0$ von x verschieden ist

Ü14 $ad \neq bc$. Für $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ und $x = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot y$

gilt dann $P \cdot x = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot y$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} (ad-bc)\, y_1 \\ (ad-bc)\, y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Wir müssen noch die Eindeutigkeit zeigen. Sei also $x \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung von $P \cdot x = y$. Dann folgt

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot y = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot x$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \cdot x = x.$$

(Man kann auch den Satz $A \cdot B = E_n \Rightarrow B \cdot A = E_n$ benutzen den wir hier im Fall $n = 2$ bewiesen haben)

Ü15 Für $P = [p_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sind die Zeilen $p^j = [p_{j,1}, \ldots, p_{j,n}]$

so dass $\|p^j\|^2 = \sum_{k=1}^{n} p_{j,k}^2$. Also ist $N(P) = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{j,k}^2 \right)^{1/2}$

die euklidische Länge des Vektors

$$[p_{1,1}, \dots, p_{1,n}, p_{2,1}, \dots, p_{2,n}, \dots, p_{m,1}, \dots, p_{m,n}] \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Die Dreiecksungleichung $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ für die Länge im $\mathbb{R}^{mn}$ liefert daher

$$N(P+Q) \le N(P) + N(Q).$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $P \cdot x = \begin{bmatrix} \langle p^1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle p^m, x \rangle \end{bmatrix}$, also

$$\|P\cdot x\|^2 = \sum_{j=1}^m |\langle p^j, x\rangle|^2 \le \sum_{j=1}^m \|p^j\|^2 \|x\|^2$$ (wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$= \left(\sum_{j=1}^m \|p^j\|^2\right) \|x\|^2 = N(P)^2 \|x\|^2.$$

Durch Ziehen der Wurzel folgt $\|P \cdot x\| \le N(P) \|x\|$.